תרגיל 7

1. נגדיר את המטריצות הממשיות הבאות

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

(א) מה הפולינום האופיני ומה הפולינום המינמאלי של A ושל B?
פתרון : הפולינום האופיני של A הוא

$$f_A(\lambda)=\left|\begin{pmatrix}\lambda-1&&&\\&\lambda-1&-1&\\&&\lambda-1&-1\\&&&\lambda-1\end{pmatrix}\right|=(\lambda-1)^4$$

לכן הפולינום המינמאלי של A הוא מהצורה $(\lambda-1)^i$ כאשר $i\in\{1,2,3,4\}$
בדיקה ישירה מראה כי הפולינום המימאלי הוא $m_A(\lambda)=(\lambda-1)^3$
פולינום האופיני של B הוא

$$f_A(\lambda)=\left|\begin{pmatrix}\lambda-1&-1&&\\&\lambda-1&&\\&&\lambda-1&-1\\&&&\lambda-1\end{pmatrix}\right|=(\lambda-1)^4$$

לכן הפולינום המינמאלי של A הוא מהצורה $(\lambda-1)^i$ כאשר $i\in\{1,2,3,4\}$
בדיקה ישירה מראה כי הפולינום המימאלי הוא $m_A(\lambda)=(\lambda-1)^2$

(ב) לכל אחת מהמטריצות - מצאו ע"ע. לכל ע"ע מצאו את המרחב העצמי שלו, את הר"א ואת הר"ג. הסיקו האם המטריצה לכסינה.
פתרון : ל A יש ע"ע יחיד $\lambda=1$.
מרחב עצמי:

$$A-I=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

ולכן

$$V_{\lambda=1}=\left\{\begin{pmatrix} s\\ t\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\ s,t\in\mathbb{R}\right\}$$

הר"א = 4. הר"ג= 2 ולכן אינה לכסינה.

ל B יש ע"ע יחיד $\lambda=1$.

מרחב עצמי:

$$A-I=\begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&0\end{pmatrix}$$

ולכן

$$V_{\lambda=1}=\left\{\begin{pmatrix} s\\ 0\\ t\\ 0\end{pmatrix},\ s,t\in\mathbb{R}\right\}$$

הר"א = 4. הר"ג= 2 ולכן אינה לכסינה.

(ג) האם A,B דומות?

פתרון : אם A,B דומות אזי יש להם אותו פולינום מינמאלי. כיוון שבתרגיל שלנו הפולינומים שונים אזי המטריצות אינן דומות.

2. מצא פולינום מינימאלי למטריצות הבאות:

(א) $A=\begin{pmatrix} 0&1&0\\ 5&4&0\\ 2&1&2\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{3\times3}$

פתרון : הפ"א הוא

$$\begin{aligned} f_A(\lambda) &= \left|\begin{pmatrix} \lambda&-1&0\\ -5&\lambda-4&0\\ -2&-1&\lambda-2\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} \lambda&-1&0\\ \lambda-5&\lambda-5&0\\ -2&-1&\lambda-2\end{pmatrix}\right| \\ &= (\lambda-5)\left|\begin{pmatrix} \lambda&-1&0\\ 1&1&0\\ -2&-1&\lambda-2\end{pmatrix}\right| = (\lambda-5)\left|\begin{pmatrix} \lambda+1&0&0\\ 1&1&0\\ -2&-1&\lambda-2\end{pmatrix}\right| = (\lambda-5)(\lambda+1)(\lambda-2)\end{aligned}$$

כיוון שמתפרק לגורמים לינארים שונים זהו גם הפולינומים המינמאלי.

(ב) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in (\mathbb{Z}_2)^{3\times 3}$

פתרון : הפ"א הוא

$$\begin{aligned} f_B(\lambda) &= \left| \begin{pmatrix} \lambda+1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{pmatrix} \right| = (\lambda+1) \left| \begin{pmatrix} \lambda+1 & 1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \right| = (\lambda+1)\left[\lambda(\lambda+1)+1\right] \\ &= (\lambda+1)\left[\lambda^2+\lambda+1\right] \end{aligned}$$

כיוון שמתפרק לגורמים אי פריקים שונים זהו גם הפולינומים המינמאלי.

3. תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה לכסינה. יהא $f_A(x)$ הפ"א שלה. הוכח כי $f_A(A) = 0$ ללא שימוש במשפט קיילי המילטון

פתרון : נסמן ב $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ את המטריצה האלכסונית ש A דומה לה. מתקיים כי $f_A(x) = f_D(x)$.

בנוסף, לכל פולינום $p(x)$ מתקיים

$$p(A) = 0 \iff p(D) = 0$$

לכן מספיק להראות כי $f_D(D) = 0$. מחישוב ישיר נקבל כי $f_D(x) = \Pi_{i=1}^{n}(x-\lambda_i)$ כאשר נציב את D נקבל

$$f_D(D) = f_D(x) = \prod_{i=1}^{n}(D - \lambda_i I)$$

זוהי מכפלה של מטריצות אלכסוניות ולכן חישוב הכפל בניהם פשוט. הכפל גם הוא מטריצה אלכסונית. את האלכסון אפשר לחשב כך

$$[f_D(D)]_{,j,j} = \prod_{i=1}^{n}[D - \lambda_i I)]_{j,j} \quad j = 1,2,\dots n$$

כיוון ש $[D - \lambda_j I]_{jj} = 0$ נקבל שכל איברי האלכסון של $f_D(D)$ הם אפס. כיוון שזה מטריצה אלכסונית אזי זוהי מטריצת האפס.

4. תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ נגדיר את הת"מ $W = span\left\{I, A, A^2, A^3, A^4, \dots\right\} \leq \mathbb{F}^{n\times n}$

(א) הוכח כי $\dim W \leq n$ (רמז: קילי המילטון)

(ב) תן דוגמא ל W המקיים $\dim W = n$ ותן דוגמא ל W המקיים $\dim W = 1$

פתרון : לפי קיילי המילטון $f_A(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{F}_n[x]$ מקיים $f_A(A) = 0$ כלומר

$$A^n = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i$$

כלומר $A^n \in span\{I, A, \dots A^{n-1}\}$. באינדוקציה, קל להראות כי לכל k מתקיים $A^k \in span\{I, A, \dots A^{n-1}\}$ ולכן

$$W \subseteq A^n \in span\{I, A, \dots A^{n-1}\}$$

ולכן המימד שלו לכל היותר n.

דוגמא ל $\dim W = n$ היא בלוק זורדן

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

דוגמא ל $\dim W = 1$ היא $A = I$ מטריצת היחידה.

בהצלחה!