חשבון אינפי 1 למדמ"ח

תרגיל 12- פתרון

1. הוכיחו לפי הגדרת $\varepsilon - N$ של גבול הסדרה:

א. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n-7}{n+2}=5$

פתרון: יהי $\varepsilon>0$, צריך למצוא $N\in\mathbb{N}$, כך שלכל $n>N$ מתקיים $\left|\frac{5n-7}{n+2}-5\right|<\varepsilon$.

אי השיוויון האחרון מתקיים אם ורק אם $\left|\frac{5n-7-5n-10}{n+2}\right|<\varepsilon$.

$$\Leftrightarrow \frac{17}{n+2}<\varepsilon$$
$$\Leftrightarrow \varepsilon(n+2)>17$$
$$\Leftrightarrow n>\frac{17-2\varepsilon}{\varepsilon}$$

מספיק לקחת $N=\left[\frac{17-2\varepsilon}{\varepsilon}\right]+1$, ואז לכל $n>N$ מתקיים $\left|\frac{5n-7}{n+2}-5\right|<\varepsilon$ כדרוש.

ב. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5-n^2}{n+1}=-\infty$

פתרון: יהי $A<0$. צריך למצוא $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>N$ מתקיים

$$\frac{5-n^2}{n+1}<A$$
$$\Leftrightarrow 5-n^2<nA+A$$
$$\Leftrightarrow -n^2-nA+5-A<0$$
$$-n^2-nA+5-A=0$$
$$n_{1,2}=\frac{A\pm\sqrt{A^2+4(5-A)}}{-2}$$

אם $A^2+4(5-A)<0$ אזי $\frac{5-n^2}{n+1}<A$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

אם $A^2+4(5-A)>0$ מספיק לבחור $N=\left[\frac{A-\sqrt{A^2+4(5-A)}}{-2}\right]+1$ ואז לכל $n>N$

יתקיים $\frac{5-n^2}{n+1}<A$ כדרוש.

2. חשבו את הגבולות של הסדרות הבאות:

א. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+\sqrt{n^3+2}}{n^2-n+1}$

פתרון: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+\sqrt{n^3+2}}{n^2-n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3+\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^4}}}{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=3$

ב. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!-n!}$

פתרון: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!-n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

ג. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{1-n^3}+n\right)$

פתרון:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{1-n^3}+n)=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt[3]{1-n^3}+n)(\left(\sqrt[3]{1-n^3}\right)^2-n\sqrt[3]{1-n^3}+n^2)}{(\left(\sqrt[3]{1-n^3}\right)^2-n\sqrt[3]{1-n^3}+n^2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-n^3+n^3}{(\left(\sqrt[3]{1-n^3}\right)^2-n\sqrt[3]{1-n^3}+n^2)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(\left(\sqrt[3]{1-n^3}\right)^2-n\sqrt[3]{1-n^3}+n^2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\left(\sqrt[3]{\frac{1}{n^3}-1}\right)^2-\sqrt[3]{\frac{1}{n^3}-1}+1}=\frac{0}{1+1+1}=0$$

ד. $\lim\limits_{n\to\infty}n^2(\ln(n^3+n)-\ln n^3)$

פתרון:

$$\lim_{n\to\infty}n^2(\ln(n^3+n)-\ln n^3)=\lim_{n\to\infty}n^2\ln\frac{n^3+n}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{n(n^2+1)}{n^3}\right)^{n^2}=\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}=\ln e=1$$

ה. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{(\ln n)^2}$

פתרון: נגדיר פונקציה $f(x)=\frac{x}{(\ln x)^2}$ עבור $x>1$.

נחשב את גבול הפונקציה באינסוף ונסיק על גבול הסדרה:

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{(\ln x)^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{2(\ln x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{2}=\infty$ השתמשנו פעמיים בכלל לופיטל.

ולכן $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{(\ln n)^2}=\infty$.

ו. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^2}{n^2+1}\right)^{\frac{n}{5}}$

פתרון:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^2}{n^2+1}\right)^{\frac{n}{5}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1+2n}{n^2+1}\right)^{\frac{n}{5}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n}{n^2+1}\right)^{\frac{n}{5}}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2n}{n^2+1}\right)^{\frac{n^2+1}{2n}}\right]^{\frac{2n}{(n^2+1)}\cdot\frac{n}{5}}$$

$$=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{(n^2+1)}\cdot\frac{n}{5}}=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{2}{5(1+\frac{1}{n^2})}}=e^{\frac{2}{5}}$$

3. הוכיחו או הפריכו:

א. אם $\langle a_n\rangle$ סדרה קושי, אז $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$.

תשובה: הטענה נכונה.

הוכחה: נתון ש- $\langle a_n\rangle$ סדרה קושי ולכן $a_H\approx a_K$ לכל $H,K\in\mathbb{N}^*\setminus\mathbb{N}$, בפרט $a_{H+1}\approx a_H$ לכל $H\in\mathbb{N}^*\setminus\mathbb{N}$, כלומר $a_{H+1}-a_H\approx 0$ לכל $H\in\mathbb{N}^*\setminus\mathbb{N}$ ולכן $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$ כדרוש.

ב. אם $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$, אז $\langle a_n\rangle$ סדרה קושי.

תשובה: הטענה לא נכונה.

דוגמא נגדית:

ניקח סדרה $\left\langle 1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right\rangle$

סדרה זו מקיימת

$a_{n+1}-a_n=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n+1}-\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, אבל זוהי לא סדרת קושי, כי עבור $H,K\in\mathbb{N}^*\setminus\mathbb{N}$ כך ש- $H>K$

$$a_H-a_K=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{H+1}-\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{K}\right)=\frac{1}{K+1}+...\frac{1}{H+1}>\frac{H-K}{H+1}$$

המעבר לאי שוויון נכון, כי יש $H-K$ מחוברים בסכום כאשר הקטן ביותר מבין המחוברים הינו $\frac{1}{H+1}$.

ניקח $H=2K$ ונקבל $a_{2K}-a_K>\frac{2K-K}{2K+1}=\frac{K}{2K+1}>\frac{K}{2K+K}=\frac{1}{3}$,

כלומר מצאנו שני אינדקסים אינסופיים H,K כך ש- $a_H\not\approx a_K$ ולכן הסדרה אינה סדרת קושי.