תזכורת

תהי $\varphi: V \times V \to \mathbb{F}$ תבנית דו לינארית.

אם φ סימטרית, $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$, אז: $q(v) = \varphi(v,v)$.

הגדרה

תהי φ תבנית דו לינארית סימטרית או אנטי סימטרית.

אומרים ש - $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ **בסיס של V אורתוגונלי יחסית ל - φ**, אם:

1. B בסיס עבור V.
2. לכל $i \neq j$: $\varphi(v_i, v_j) = 0$.

משפט

תהי φ סימטרית. אזי, קיים ב V – בסיס B של V אורתוגונלי יחסית ל - φ.

הוכחה

נוכיח באינדוקציה על $n = \dim(V)$.

בסיס: $n = 1$

לכל $v \in V$: $\{v\}$ בסיס כדרוש, שכן כל קבוצה בת וקטור אחד היא בלתי תלויה לינארית, ולכן בסיס, וכן אורתוגונלית.

צעד: $n > 1$

נניח נכונות הטענה עבור $n-1$, ונוכיח נכונות הטענה עבור n.

אם לכל $x, y \in V$: $\varphi(x,y) = 0$, אזי אין מה להוכיח, שכן כל בסיס הוא אורתוגונלי.

לכן, נניח ש - $\varphi \not\equiv 0$.

לפי הזהות הפולארית: $q \not\equiv 0$.

לכן, קיים $v_1 \in V$, כך ש - $q(v_1) \neq 0$. ז"א: $\varphi(v_1, v_1) \neq 0$.

נגדיר: $U = span\{v_1\}$.

נתבונן ב - $\varphi|_U$. מתקיים: $Ker(\varphi|_U) = \{0\}$.

הוכחה

נניח ש - $y \in Ker\varphi|_U$.

$y \in U$, לכן $y = \alpha \cdot v_1$.

$y \in Ker\varphi|_U$, לכן לכל $\beta \cdot v_1 = x \in U$: $\varphi(x, y) = 0$.

לכן:

$$\varphi(x, y) = \varphi(\beta \cdot v_1, \alpha \cdot v_1) = \alpha \cdot \beta \cdot \overbrace{\varphi(v_1, v_1)}^{\neq 0} = 0$$

לכן: $\alpha = 0$, כלומר: $y = 0$.

לכן, עפ"י משפט הפירוק הניצב, קיים פירוק של V כסכום ישר: $V = U \oplus U^{\perp}$.

עפ"י משפט המימדים (והעברת אגפים): $dim(U^{\perp}) = dim(V) - dim(U) = n - 1$.

לכן, לפי הנחת האינדוקציה, קיים ב - $U^{\perp}$ בסיס B' אורתוגונלי יחסית ל - φ.

נסמן: $B' = \{v_2, \cdots, v_n\}$.

נגדיר: $B = \{v_1, v_2, \cdots v_n\}$. B בסיס כנדרש.

■

מסקנה

תהי $q: V \to \mathbb{F}$ תבנית ריבועית. אזי, קיים בסיס B של V כך ש:

$$q(x) = \alpha_1 \cdot x_1^2 + \cdots + \alpha_n \cdot x_n^2$$

הוכחה

נבחר B בסיס אורתוגונלי יחסית ל - φ.

$$[x]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$q(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}g_{ij}\cdot x_i\cdot x_j$$

לכל $1\le i\neq j\le n$, נקבל: $g_{ij}=0$. לכן: $q(x)=\overset{\alpha_1}{\widetilde{g_{11}}}\cdot x_1^2+\cdots+\overset{\alpha_n}{\widetilde{g_{nn}}}\cdot x_n^2$.

$\blacksquare$

הערה

כדי לפשט את הצורה האלכסונית של $q(x)$, ניתן להשתמש בכפל של כל אחד מה - α_i בריבוע כלשהו (שקול להחלפה של ווקטור בסיס ע״י ווקטור פרופורציונאלי).

מקרים מיוחדים

1. $\underline{\mathbb{F}=\mathbb{C}}$

נתבונן ב - $q(x)=\alpha_1\cdot x_1^2+\cdots+\alpha_n\cdot x_n^2$.

עפ״י ההערה, מעל $\mathbb{C}$, ניתן לקבל לכל α_i, 0 או 1. נקבל, אחרי שינוי סדר של ווקטורי בסיס, אם צריך:

$$q(x)=x_1^2+\cdots+x_r^2$$
$$\Downarrow$$
$$r=rank(q)=rank(G)\quad,\quad r\le n$$

2. $\underline{\mathbb{F}=\mathbb{R}}$

עפ״י ההערה, מעל $\mathbb{R}$, ניתן לקבל לכל α_i, 0 או 1 או -1. נקבל, אחרי שינוי סדר של ווקטורי בסיס, אם צריך:

$$(*)\ q(x)=x_1^2+\cdots+x_k^2-x_{k+1}^2-\cdots-x_{k+l}^2\quad,\quad k+l=r$$

לכאורה, ייתכן כי k,l אינם מוגדרים היטב.

משפט

תהי q תבנית דו ריבועית מעל $\underline{\mathbb{R}}$. אזי, המספר k בצורה הקנונית $(*)$ שווה:

$$k=max\{dimU\mid\overbrace{\forall\,0\neq x\in U{:}\,q(x)>0}^{\text{הגדרת תתי המרחבים } U}\}$$

הוכחה

נניח ש - $q(x)=x_1^2+\cdots x_k^2-x_{k+1}^2-\cdots-x_{k+l}^2$.

נסמן: $U=span\{v_1,\cdots,v_k\}$.

- $.dimU = k$
- אם $0 \neq x \in U$, אז : $.q(x) = x_1^2 + \cdots + x_k^2 > 0$

מצד שני, יהי U' תת מרחב נוסף כך ש - $.\forall\, 0 \neq x \in U : q(x) > 0$

נתבונן ב - $.W = \{v_{k+1}, \cdots, v_n\}$

אם $x \in W$, אזי : $.q(x) \leq 0$

אם : $0 \neq x \in U'$ אז : $.q(x) > 0$

אם : $0 \neq x \in W$ אז : $.q(x) \leq 0$

לכן : $.U' \cap W = \{0\}$

כעת, נרשום את משפט המימדים :

$$dim(U' + W) = dim(U') + dim(W) - dim(U' \cap W)$$

$$dim(U') = \overbrace{dim(U' + W)}^{\leq n} - \overbrace{dim(W)}^{=(n-k)} + \overbrace{dim(U\text{^}' \cap W)}^{=0}$$

$$dim(U') \leq n - (n - k) + 0 = k$$

לכן :

$$k = max\{dimU \mid \forall\, 0 \neq x \in U : q(x) > 0\}$$

הגדרה

הזוג (k, l) נקרא **הסיגנטורה** של התבנית $.q$

<u>סימון</u> : $.(k, l) = signature(q)$

דוגמה

$$\mathbb{F} = \mathbb{R}$$

$$[x]_B = \binom{x_1}{x_2}$$

$$q(x) = x_1 \cdot x_2$$

<u>צ"ל</u> : $.(k, l)$

נרצה למצוא בסיס B' של $\mathbb{R}^2$ אורתוגונלי יחסית ל - φ, עבורו $q(x)$ בצורה קנונית.

נגדיר:

$$[x]_{B'}=\begin{pmatrix}{x_1}'\\{x_2}'\end{pmatrix}$$

$$x_1=x_1'+{x_2}'$$

$$x_2=x_1'-{x_2}'$$

$$q(x)=q(x_1,x_2)=x_1\cdot x_2=(x_1'+x_2')\cdot(x_1'-x_2')=x_1'^2-x_2'^2$$

$$\Downarrow$$

$$(k,l)=(1,1)$$

■

קשר בין אופרטורים לתבניות דו לינאריות

נניח ש - $V_{/\mathbb{R}}$ מרחב מכפלה פנימית. φ תבנית דו לינארית.

על V קיימים שני מבנים:

1. $\langle , \rangle$: מכפלה פנימית.
2. φ: תבנית דו לינארית.

יהי $T: V \to V$ אופרטור לינארי.

נגדיר $\varphi_T = V \times V \to \mathbb{R}$ ע"י הנוסחה: $\varphi_T(u,v) = < u, T(v) >$.

תרגיל: בדקו כי φ_T תבנית דו לינארית.

נבחר $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$ בסיס אורתונורמלי (יחסית למכפלה הפנימית $<,>$).

נסמן: $A = [T]_B$. נסמן: $G = G_{\varphi_T}$ (מטריצת גראם).

אז: $G = A$.

הוכחה

$$g_{ij} = \varphi_T(e_i, e_j) = < e_i, T(e_j) > = [e_i]_B^t \cdot \overbrace{G_B}^{=I} \cdot [T(e_j)]_B$$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \overbrace{1}^{\text{העמודה ה} - i} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \cdot \overbrace{A \cdot [e_j]_B}^{C_j(A)} = a_{ij}$$

$$\Downarrow$$

$$G = A$$

■

נגדיר $\varphi_T^*(u,v) = \varphi_T(v,u)$.

ניתן להוכיח כי: $G_{\varphi_T^*} = A^t$.

נקבל שהתבנית φ^* מתאימה להעתקה T^*.

מכך נובע כי: φ סימטרית $\Leftrightarrow T^* = T$.

ז"א, אם נשתמש במשפט על לכסון אורתוגונלי לאופרטור צמוד לעצמו, נקבל צורה אלכסונית של φ יחסית לבסיס אורתוגונלי.

■