טענה:

תהי G חבורה. תהיינה $H,K \leq G$ שתי תת-חבורות. נניח כי:

א) $hk=kh$ לכל $h\in H$, $k\in K$

ב) $H\cap K=\{e\}$

ג) $HK=G$ (תזכורת $HK=\{hk : h\in H, k\in K\}$)

אזי $G\simeq H\times K$

הוכחה:

נתבונן בהעתקה
$$f: H\times K\to G$$
$$(h,k)\to hk$$
נטען כי f הוא איזומורפיזם

f הומ':

$$f((h_1,k_1))\cdot f((h_2,k_2)) = h_1k_1h_2k_2 = h_1h_2k_1k_2 = f((h_1h_2,k_1k_2)) = f((h_1,k_1)\cdot(h_2,k_2))$$

f חח"ע:

f הומ' ולכן מספיק להוכיח ש $\ker f=\{e\}$. יהי $(h,k)\in \ker f$

אזי $f((h,k))=hk=e$ ולכן $h=k^{-1}\in K$ ולכן $h\in H\cap K$

נקבל $h=e \Leftarrow k=h^{-1}=e \Leftarrow (h,k)=(e,e)=e_{H\times K}$

f על:

יהי $g\in G$. לפי ג קיימים $h\in H, k\in K$ כך ש $g=hk$, ולכן $g=f((h,k))$

לכן f איזומורפיזם $f:H\times K\xrightarrow{\sim}G$

תזכורת:

תהי G חבורה. סדרה מרכזית תחתונה:

$\gamma_1G=G \quad \gamma_2G=[G,G] \quad \gamma_3G=[G,\gamma_2G] \dots \gamma_nG=[G,\gamma_{n-1}G]$

$\gamma_nG\trianglelefteq G$ לכל n, G נקראת נילפוטנטית אם קיים n כך ש $\gamma_nG=\{e\}$

משפטון:

תהיינה G,H חבורות נילפוטנטיות אזי $G\times H$ גם נילפוטנטית

הוכחה:

1) קל לראות ש $\gamma_n(G\times H)=\gamma_n G\times\gamma_n H$ (תרגיל: לבדוק)

תזכורת:

אם G חבורה ו-$H\le G$ תת חבורה. אז המנרמל של H:

$$N_G(H)=\{g\in G:\forall_{h\in H}\ ghg^{-1}\in H\}=\{g\in G:gH=Hg\}$$

בפרט $H\trianglelefteq N_G(H)$

טענה:

תהי G חבורה נילפוטנטית. תהי $H\subsetneq G$ תת חבורה אמיתית $(H\neq G)$ זו נאותה

אזי $H\subsetneq N_G(H)$.

הוכחה:

$\gamma_1 G=G\not\le H$

$\vdots$

$\gamma_n G=\{e\}\le H$ ← מנילפוטנטיות

לכן קיים $1\le k<n$ כך ש $\gamma_{k+1}G\le H$ אבל $\gamma_k G\not\le H$

נראה ש $\gamma_k G\le N_G(H)$: יהי $g\in\gamma_k G$. ויהי $h\in H\le G$. אזי

$ghg^{-1}h^{-1}=[g,h]\in\underbrace{[\gamma_k G,G]}=\gamma_{k+1}G\le H$ (ניתן לקחת $hgh^{-1}g^{-1}$ ונקבל $[G,\gamma_k G]$ וההוכחה היא אותה ההוכחה)

לכן, $ghg^{-1}h^{-1}\in H \Rightarrow ghg^{-1}\in H$ ← נכון לכל $h\in H$, כלומר $g\in N_G(H)$.

סה"כ $\gamma_k G\le N_G(H)$. אבל $\gamma_k G$ מכיל איברים שאינם שייכים ל-H לכן $H\subsetneq N_G(H)$

הערה: תהי G חבורה. נניח שלכל תת-חבורה נאותה $H\subsetneq G$ מתקיים $H\subsetneq N_G(H)$. אזי G נילפוטנטית מקומית (כל תת חבורה נוצרת סופית של G היא נילפוטנטית). (פלוטקין 1954)

משפט:

תהי G חבורה. התנאים הבאים שקולים:

1) G נילפוטנטית

ב) כל תת חבורה p-סילו של G (לכל p) היא נורמלית

3) יהיו $p_1,\dots,p_r$ הראשוניים שמחלקים את G. לכל $1\le i\le r$, תהי P_i תת חבורה p_i סילו. אזי $G\cong P_1\times\dots\times P_r$

הוכחה:

$(1)\Rightarrow$(ב): תהי G נילפוטנטית, יהי p ראשוני, ותהי $P\le G$ תת חבורה p-סילו.

רוצים להוכיח כי $P\trianglelefteq G$, כלומר $N_G(P)=G$.

לפי המשפט הקודם, מספיק להוכיח כי $N_G(N_G(P))=N_G(P)$

כי אם $N_G(P)=H$ הייתה תת חבורה נאותה, היה מתקיים $(H\subsetneq N_G(H))$

ואכן, יהי $g\in N_G(N_G(P))$. זה אומר ש $gN_G(P)g^{-1}=N_G(P)$

בפרט, $P\trianglelefteq N_G(P)$. לכן $gPg^{-1}\le N_G(P)$. אך P היא תת חבורה p-סילו של $N_G(P)$ ולכן gPg^{-1} גם תת חבורה p-סילו של $N_G(P)$

אך $P\trianglelefteq N_G(P)$, לכן ל-$N_G(P)$ יש רק תת חבורה p-סילו אחת.

לכן $gPg^{-1}=P$ ולכן $g\in N_G(P)$. קיבלנו $N_G(P)=N_G(N_G(P)) \Leftarrow N_G(P)=G$

$\Downarrow$

$P\trianglelefteq G$

(ב)$\Rightarrow(3)$: יהיו $p_1,\dots,p_r$ הראשוניים שמחלקים את $|G|$. תהי P_i תת חבורה p_i-סילו. צריך להוכיח $G\cong P_1\times\dots\times P_r$.

נוכיח באינדוקציה על r

אם $r=1$ אזי G היא חבורה p_1-סילו. לכן $G=P_1$ וגם $P_1\trianglelefteq G$

נניח שהמשפט ידוע עבור חבורות G כך של-$|G|$ יש $r-1$ גורמים

ראשוניים. יהי $|G| = p_1^{e_1}\cdot\ldots\cdot p_r^{e_r}$

נגדיר $H = P_1P_2\ldots P_{r-1} = \{x_1\ldots x_{r-1} : x_i\in P_i\} \le G$ (ת-חב כל P_i היא נורמלית)

תת-טענה: $|H| = p_1^{e_1}\ldots p_{r-1}^{e_{r-1}}$

הוכחה: לפי משפט האיזומורפיזם השני

$$H/P_{r-1} = (P_1\cdots P_{r-2})P_{r-1}/P_{r-1} \simeq P_1\cdots P_{r-2}/\underbrace{(P_1\ldots P_{r-2})\cap P_{r-1}}_{=\{e\}}$$

כי הסדרים של P_{r-1} , $P_1\ldots P_{r-2}$ זרים

לכן $\frac{|H|}{|P_{r-1}|} = |P_1\ldots P_{r-2}|$ (באינדוקציה על r)

תת טענה: לכל $1\le k\le r$ $|P_1\ldots P_k| = p_1^{e_1}\ldots p_k^{e_k}$

הוכחה: באינדוקציה על k

$k=1$: $|P_1| = p_1^{e_1}$

נניח שהטענה נכונה עבור $k-1$. לפי משפט האיזו' השני

$$(P_1\cdots P_{k-1})P_k/P_{k-1} \simeq P_1\cdots P_{k-1}/\underbrace{(P_1\ldots P_{k-1})\cap P_k}_{=\{e\}}$$

כי הסדרים של P_k , $P_1\ldots P_{k-1}$ זרים

(סדר $p_1^{e_1}\ldots p_{k-1}^{e_{k-1}}$) (סדר $p_k^{e_k}$)

$$\frac{|P_1\ldots P_k|}{|P_k|} = |P_1\ldots P_{k-1}| = p_1^{e_1}\ldots p_{k-1}^{e_{k-1}}$$

ולכן $|P_1\ldots P_k| = p_1^{e_1}\ldots p_k^{e_k}$

תת טענה: $H \simeq P_1\times\ldots\times P_{r-1}$

הוכחה: לסדר של H יש רק $r-1$ גורמים ראשוניים. תתי החבורות סילו של H הן $P_1,\ldots,P_{r-1}$ והן נורמליות ב-G, ולכן ב-H

באינדוקציה הגרירה (ב) $\Leftarrow$ (3) כבר ידועה עבור חבורות עם $r-1$ גורמים ראשוניים

כדי לסיים להוכיח כי $G \simeq H \times P_r$ (לפי הטענה השניה נקבל $G = P_1 \times \ldots \times P_r$)

נעזר בטענה הראשונה של השיעור. צריך לבדוק 3 תנאים:

1. $H \trianglelefteq G$ (ואכן $H = P_1 \cdot \ldots \cdot P_{r-1}$), לכן $x_i \in P_i$ $h = x_1 \ldots x_{r-1}$

לכל $g \in G$:

$$ghg^{-1} = \underbrace{gx_1g^{-1}}_{\in P_1} gx_2g^{-1} \ldots \underbrace{gx_{r-1}g^{-1}}_{\in P_{r-1}} \in P_1 \ldots P_{r-1} = H$$

2. $H \trianglelefteq G$ וגם $P_r \trianglelefteq G$ לפי הנחה (2)

לפי טענה מהשיעור הקודם,

$$[H, P_r] \le H \cap P_r \underset{\substack{\text{מספרים} \\ \text{זרים}}}{=} \{e\}$$

לכן לכל $h \in H$, $x \in P_r$

$$[h, x] \in [H, P_r] = \{e\} \Rightarrow [h, x] = e$$

לכן $hx = xh$ לכל $h \in H$, $x \in P_r$

כבר ראינו כי $H \cap P_r = \{e\}$. לפי תת הטענה השנייה

$$|HP_r| = |P_1 \ldots P_r| = p_1^{e_1} \ldots p_r^{e_r} = |G|$$

לכן $HP_r = G$

לפי הטענה הראשונה של השיעור זה אומר $G \simeq H \times P_r$

(1)→(3): נניח $G \simeq P_1 \cdot \ldots \cdot P_r$ כל P_i היא חבורה מסדר $p_i^{e_i}$

לכן נילפוטנטית לפי משפט מהשיעור הקודם. הוכחנו היום כי מכפלה ישרה של חבורות נילפוטנטיות היא נילפוטנטית

תזכורת: חבורה G נקראת נוצרת סופית אם קיים מספר סופי של איברים $g_1,\dots,g_n\in G$ כך ש- $G=\langle g_1,\dots,g_n\rangle$ כלומר, כל $g\in G$ ניתן להציג כמכפלה של g_i-ים וההפכים שלהם

בפרט: אם G אבלית וגם $G=\langle g_1,\dots,g_n\rangle$ אזי כל $g\in G$ הוא מהצורה
$g=g_1^{a_1}\cdot\ldots\cdot g_n^{a_n}$ $(a_1,\dots,a_n\in\mathbb{Z})$

דוגמא:

החבורה $\mathbb{Q}$ עם חיבור לא נוצרת סופית. (הוכח בתרגול)

הרעיון: נניח בשלילה ש- $\mathbb{Q}=\langle \frac{m_1}{n_1},\dots,\frac{m_r}{n_r}\rangle$ אזי כל $g\in\mathbb{Q}$ הוא

$$g=\frac{a_1m_1}{n_1}+\dots+\frac{a_rm_r}{n_r}=\frac{x}{lcm(n_1,\dots,n_r)}$$

אבל יש איברים ב- $\mathbb{Q}$ עם מכנים שלא מחלקים את $lcm(n_1,\dots,n_r)$

דוגמא:

אם G (אבלית) ונוצרת סופית אזי G בת-מנייה.
$\downarrow$ לא חובה אבלית

$$G=\langle g_1^{a_1}\dots g_n^{a_n}\rangle\Rightarrow|G|\le\aleph_0^{\,n}=\aleph_0$$

תוצאה:

$\mathbb{R}$ עם חיבור לא נוצרת סופית

משפט:

תהי G חבורה אבלית נוצרת סופית. אזי G איזומורפית למכפלה ישרה של (מספר סופי של) חבורות ציקליות. כלומר,

$$G\simeq\underbrace{\mathbb{Z}\times\dots\times\mathbb{Z}}_{r\text{ פעמים}}\times\mathbb{Z}_{n_1}\times\dots\times\mathbb{Z}_{n_s}$$

בעיה: יש כמה דרכים להציג את אותה חבורה כמכפלה ישרה של ציקליות

לדוגמא $\mathbb{Z}_6\simeq\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3$

טענה 1:

תהי G חבורה אבלית נוצרת סופית אזי ניתן להציג את G באופן יחיד
(עד כדי שינוי סדר הגורמים) בצורה $G \simeq \mathbb{Z}^r \times \mathbb{Z}_{n_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{n_s}$
כאשר $n_1,\dots,n_s$ הינם חזקות של ראשוניים (מחלקים אלמנטריים)

$(\mathbb{Z}^r = \underbrace{\mathbb{Z}\times\dots\times\mathbb{Z}}_{\text{r פעמים}})$

תוצאה:

$\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_8 \not\simeq \mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_2$ (הסדר של שתיהן הוא 24)

כיוון ששני האגפים הם מכפלות ישירות של חבורות ציקליות עם סדרים שהם חזקות של ראשוניים

טענה 2:

תהי G חבורה אבלית נוצרת סופית. אזי ניתן להציג את G באופן יחיד בצורה
$G \simeq \mathbb{Z}^r\times\mathbb{Z}_{d_1}\times\dots\times\mathbb{Z}_{d_s}$
כאשר $1<d_1$, $d_1|d_2,\dots,d_{s-1}|d_s$ | ה-d-ים של G נקראים גורמים אינווריאנטיים)

תרגיל:

נמיין את החבורות האבליות מסדר 72

לפי טענה 1: $72=2^3\cdot 3^2$

$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3$

$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3$

$\mathbb{Z}_8\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3$

$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_9$

$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_9$

$\mathbb{Z}_8\times\mathbb{Z}_9$

לפי טענה ב:

צריך למצוא את כל הפירוקים $72=d_1\cdot\ldots\cdot d_s$ כך ש

$d_1|d_2,\ldots,d_{s-1}|d_s$

$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_{18}$

$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_6\times\mathbb{Z}_6$

$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_{36}$

$\mathbb{Z}_6\times\mathbb{Z}_{12}$

$\mathbb{Z}_{72}$

$\left(\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_m\cong\mathbb{Z}_{nm} \Leftrightarrow m,n \text{ זרים}\right)$

סה"כ:

פירוק לפי 1	פירוק לפי 2
$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_{18}$
$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_6\times\mathbb{Z}_6$
$\mathbb{Z}_8\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_{36}$
$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_9$	$\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_{24}$
$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_9$	$\mathbb{Z}_6\times\mathbb{Z}_{12}$
$\mathbb{Z}_8\times\mathbb{Z}_9$	$\mathbb{Z}_{72}$

תזכורת:

יהי $n\in\mathbb{N}$. חלוקה של n היא סדרה לא עולה $(a_1,\ldots,a_r)$ של מספרים טבעיים כך ש $a_1+\ldots+a_r=n$

הגדרה: $P(n)$ - מספר החלוקות השונות של n

לדוגמא:

$P(2)=2$ — 2; 11

$P(3)=3$ — 3; 21; 111

$P(4)=5$ — 4; 31; 22; 211; 1111

$P(5)=7$ — 5; 41; 32; 311; 221; 2111; 11111

טענה:

יהי $n \in \mathbb{N}$, ויהי $n = p_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{e_r}$ הפירוק לגורמים של n.

אזי מספר החבורות האבליות מסדר n, עד כדי איזומורפיזם הינו,

$P(e_1) \cdot \ldots \cdot P(e_r)$

דוגמא:

$n = 72 = 2^3 \cdot 3^2$ אזי מספר החבורות האבליות מסדר 72 עד כדי

איזומורפיזם הוא $P(3) \cdot P(2) = 3 \cdot 2 = 6$

הוכחה:

יהי $m = p^n$ חזקה של ראשוני. כל פירוק של m לגורמים הוא

$p^n = m = p^{a_1} \cdot \ldots \cdot p^{a_r} \quad (a_1 + \ldots + a_r = n)$

לכן מקבלים התאמה חח"ע ועל בין חבורות אבליות מסדר m לבין חלוקות

של n. $\mathbb{Z}_{p^{a_1}} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{p^{a_r}}$

אינדוקציה על מספר הגורמים הראשוניים של m

הגדרה: תהי G חבורה אבלית נוצרת סופית. אזי, באופן יחיד

$G \cong \mathbb{Z}^r \times (\text{חבורה סופית})$

המספר r נקרא הדרגה של G