מתמטיקה

בס"ד

89112, אוניברסיטת בר-אילן
סמסטר א' (מועד ב'), תשס"ח

אלגברה ליניארית (89112) \ פרופ' שניידר ופרופ' עדין
בחינת סיום (מועד ב')

88117
א'תשס"ח

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).
מותר להשתמש במחשבון פשוט. אין להשתמש בכל חומר עזר אחר.
במבחן 3 פרקים, בכל אחד מהם בחירה בין שאלות. נא לציין במפורש אילו תשובות במחברת מיועדות לבדיקה, אחרת תיבדקנה התשובות הראשונות בכל פרק.
נא להסביר ולנמק בבירור כל פתרון, ולכלול במחברת את כל החישובים הנחוצים.

בהצלחה!

פרק I: (36 נקודות) ענה על 3 מתוך 4 השאלות. משקל כל שאלה 12 נקודות.

1. הוכח או הפרך: אם S קבוצת וקטורים תלויה ליניארית אז קיים וקטור ב- S שהוא צירוף ליניארי של האחרים.

2. יהי V מרחב וקטורי n-ממדי. הוכח: אם $S=\{\mathbf{v}_1,\dots\mathbf{v}_n\}\subseteq V$ קבוצה פורשת (את V) אז S בת"ל. (לא מספיק לומר שזה משפט שהוכח בכיתה!)

3. תהי $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ מטריצה. הוכח: $N(A)=\{0\}$ $\Leftrightarrow$ עמודות A בת"ל.

4. הוכח או הפרך: מרחב השורות $R(A)$ נשמר בשעת דירוג המטריצה A.

פרק II: (12 נקודות) ענה על שאלה אחת מתוך 2. משקל כל שאלה 12 נקודות.

5. האם הוקטורים $\begin{pmatrix}\bar{4}\\ \bar{3}\\ \bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{3}\\ \bar{1}\\ \bar{2}\end{pmatrix}$ ב- $(\mathbb{Z}_5)^3$ תלויים ליניארית? בכל מקרה, השלם אותם לקבוצה הפורשת את $(\mathbb{Z}_5)^3$.

6. מצא את המטריצה ההפכית של $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2+i & 3\\ 2 & 3 & 4+i\end{pmatrix}$ ב- $\mathbb{C}^{3\times3}$, אוסף המטריצות מסדר 3×3 מעל $\mathbb{C}$. בדוק את תשובתך.

פרק III: (52 נקודות) ענה על 4 מתוך 5 השאלות. משקל כל שאלה 13 נקודות.

7. האם הקבוצות הבאות הן תת-מרחבים של $\mathbb{R}^3$? נמק היטב.

מבחנים ד

א) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x\geq y+z,\ \ x-y\leq z\}$

ב) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+2y+3z\geq -10\}$

8. א) עבור אילו ערכים של a, קבוצת הוקטורים $\left\{\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\a\end{pmatrix},\mathbf{v}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\a\end{pmatrix}\right\}$

היא בסיס ל- $\mathbb{R}^3$?

ב) כאשר הוקטורים הנ"ל אינם בסיס ל- $\mathbb{R}^3$ (כלומר כאשר הם תלויים ליניארית), תאר על-ידי משוואה את המרחב הנפרש על ידם.

9. מצא בסיס לתת המרחב של $\mathbb{R}^4$ הנפרש על ידי הוקטורים

$$\mathbf{u}_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\5\end{pmatrix},\ \mathbf{u}_2=\begin{pmatrix}2\\0\\4\\6\end{pmatrix},\ \mathbf{u}_3=\begin{pmatrix}2\\3\\5\\4\end{pmatrix},\ \mathbf{u}_4=\begin{pmatrix}1\\1\\3\\2\end{pmatrix}.$$

10. תהי

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&2&1\\2&0&1&1&3\\0&4&1&3&-1\end{pmatrix}$$

א) מצא בסיסים למרחבים $C(A)$, $R(A)$ ו- $N(A)$.

ב) מצא את הפתרון הכללי למערכת $A\mathbf{x}=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$.

11.

א) מצא את המטריצה ההפכית ל- $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$.

ב) בעזרת המטריצה A^{-1} שמצאת בסעיף הקודם, פתור את מערכת המשוואות

$$A\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}.$$