תרגיל 8 – אינפי 2

.1

a. דני שנא לעשות שיעורים באינטגרלים, והחליט אחת לתמיד להוכיח שכל האינטגרלים המסויימים הם אפס:

$$\int_a^b f(x)dx=\left\{u=\pi\frac{(x-a)}{b-a}\right\}=C_1\int_0^\pi f(u)du=\{t=\sin u\}=C_1\int_0^0\frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}du=0$$

עזרו לדני לתקן את טעותו...

פתרון:

דני רצה לבצע הצבה מהסוג הבא $t=g(u)$ על אינטגרל $\int_a^b f(u)du$, לשם כך צריך לעבור מהאינטגרל $\int_{g(a)}^{g(b)} f(g^{-1}(t))\left[g^{-1}(t)\right]' dt$ על ידי הצבה $u=g^{-1}(t)$ אל האינטגרל $\int_a^b f(u)du$. (גם ארז עשה טעות בתרגיל, והיה צריך להיות רשום $C_1\int_0^0\frac{f(\arcsin t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$.)

הבעייה העיקרית של דני הייתה ש $\sin$ אינה הפיכה בתחום $[0,\pi]$ (כי היא אינה חח"ע) ולכן לא יכל לבצע הצבה כפי שתארתי לעיל (וכמובן שהערך אפס התקבל פעמיים על ידי הפונקציה הלא חח"ע הזו...)

b. חשבו את האינטגרל $\int_0^\pi f(x)\cos x dx$ באמצעות $F(x)$ ו $G(x)$ כאשר

$G(x)=\int f(\pi-\arcsin x)dx$ ו , $F(x)=\int f(\arcsin x)dx$

פתרון:

בתחום $[0,\frac{\pi}{2}]$ ההופכית של $\sin$ הינה $\arcsin$, ובתחום $[\frac{\pi}{2},\pi]$ ההופכית של $\sin$ הינה $\pi-\arcsin$. $\int_0^\pi f(x)\cos x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\cos x dx$ נבצע את ההצבה $t=\sin x$, $dt=\cos x dx$ ולכן

$$\int_0^\pi f(x)\cos x dx=\int_0^1 f(\arcsin t)dt+\int_1^0 f(\pi-\arcsin t)dt=F(1)-F(0)+G(0)-G(1)$$

זה נכון מכיוון שבקטע $[0,\frac{\pi}{2}]$ מתקיים $f(\arcsin(\sin x))\cos x = f(x)\cos x$ נסמן

$h(x) = f(\arcsin x)$, $g(x)=\sin x$ ולכן למעשה אנו צריכים לחשב את האינטגרל של

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(g(x))g'(x)dx$ ואנו מבצעים את ההצבה $t = g(x)$ לקבל את האינטגרל $\int_{g(0)}^{g(\frac{\pi}{2})} h(t)dt$.

בקטע השני ההסבר דומה.

<u>הערה</u>: עשינו פה למעשה טריק כללי, לפיו הצגנו $x = g^{-1}(g(x))$, $h = f(g^{-1})$. זה מה שהיינו עושים במקרה כללי דומה.

2. תהיי f פונקציה רציפה, הוכח שקיימת נקודה $c \in (a,b)$ כך ש $f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)dx$

(שימו לב שהנקודה נמצאת בקטע **הפתוח**...)

הוכחה:

נסמן $\int_a^b f(x)dx \frac{1}{b-a} = m$. אם f קבועה אזיי ברור ש $f = m$ ולכן סיימנו את התרגיל. נניח אם כן ש f אינה קבועה. לכן בהכרח קיימת נקודה בה $f > m$ או נקודה בה $f < m$ (אחרת היא כמובן קבועה שווה ל m).

נניח ב.ה.כ שקיימת נקודה x_0 כך ש $f(x_0) > m$, ונניח בשלילה ש $f \geq m$ בכל הקטע. נזכר בתרגיל 6 שאלה 2. בקטע $[a,b]$ מתקיים $f(x) - m \geq 0$ אבל $f(x) - m$ לא שווה זהותית לאפס, ולכן $\int_a^b \left(f(x) - m \right) dx > 0$ ולכן $\int_a^b f(x)dx - (b-a)m > 0$ ולכן $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx > m$ בסתירה. לכן קיימת נקודה x_1 כך ש $f(x_1) < m$.

מכיוון ש f רציפה, לפי משפט ערך הביניים הרגיל, קיימת נקודה c בין x_0 לבין x_1 כך ש $f(c) = m$ ברור ש c אינה יכולה להיות x_0 או x_1 (כי שם הפונקציה גדולה ממש או קטנה ממש מ m) ולכן היא בקטע הפתוח בינהן, ובפרט בתוך הקטע הפתוח (a,b) .

3. תהי f פונקציה רציפה. הוכח ש $\int_0^x \left[\int_0^t f(u)du \right] dt = \int_0^x f(u)(x-u)du$

הוכחה: $f(t)$ רציפה, לכן יש לה פונקציה קדומה $F(t)=\int_0^t f(u)du$ ולכן למעשה

$\int_0^x F(t)dt=\int_0^x\left[\int_0^t f(u)du\right]dt$ נבצע אינטגרציה בחלקים עם $u'=1, v=F(t)$ לקבל

$$\int_0^x F(u)du=uF(u)\big|_0^x-\int_0^x uf(u)du=xF(x)-\int_0^x uf(u)du=x\int_0^x f(u)du-\int_0^x uf(u)du$$

$$=\int_0^x\left[xf(u)-uf(u)\right]du=\int_0^x f(u)(x-u)du$$

שימו לב לשיוויון $\int_0^x xf(u)du=x\int_0^x f(u)du$. הוא נכון ספיציפית לכל x נתון (כאשר מסתכלים על x כקבוע, הרי הוא אינו קשור לאינטגרציה), ולכן השיוויון נכון באופן כללי.

4. תהי f רציפה, הוכח $\frac{d}{dx}\left[\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt\right]=f(g(x))g'(x)-f(h(x))h'(x)$ (הכללה של מה שעשינו בכיתה).

הוכחה: $f(t)$ רציפה ולכן יש לה קדומה $F(t)$ עבורה מתקיים השיוויון $\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt=F(g(x))-F(h(x))$ לכל x ספציפי. מכאן התשובה לשאלה טריוויאלית על ידי גזירה.

5. בהמשך לתרגיל על f פונקציה עולה $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ כך שעבור $r_{\mathrm{n}}:=\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{\mathrm{k=0}}^{\mathrm{n-1}} f(\frac{k}{n})$ ראינו שמתקיים : $0\le r_{\mathrm{n}}\le\frac{f(1)-f(0)}{\mathrm{n}}$.

כעת , **<u>נניח כי f גזירה ברציפות</u> , ונוכיח כי קיים :** $\lim_{n\to\infty} n\cdot r_n=\frac{f(1)-f(0)}{2}$ –בעזרת השלבים הבאים :

a. נגדיר : $\mathrm{F}_k(x):=\int_{\frac{k}{n}}^x\left[f(t)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right]dt$. אז קיים : $r_{\mathrm{n}}=\sum_{\mathrm{k=0}}^{\mathrm{n-1}}\mathrm{F}_k\left(\frac{\mathrm{k+1}}{\mathrm{n}}\right)$.

בעזרת פיתוח טיילור הראו כי מתקיים : $\mathrm{F}_k(x)=\frac{f^{(1)}(c)(x-\frac{k}{n})^2}{2}$, עבור נקודה c מתאימה כלשהיא

הוכחה:

לפי פיתוח טיילור סביב $\frac{k}{n}$ מתקיים $F_k(x)=F_k(\frac{k}{n})+F_k'(\frac{k}{n})(x-\frac{k}{n})+\frac{1}{2}F_k''(c)(x-\frac{k}{n})^2$ כאשר c בין $\frac{k}{n}$ לבין x.

אבל $F_k(\frac{k}{n})=\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k}{n}}\left[f(t)-f(\frac{k}{n})\right]dt=0$. $F_k'(\frac{k}{n})=f(\frac{k}{n})-f(\frac{k}{n})=0$. $F_k''(c)=f'(c)$ וקיבלנו את הדרוש.

b. הראו כי קיים : $n\cdot r_n=\frac{1}{2n}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}f^{(1)}(c_k)$ עבור נקודות $\frac{k}{n}\le c_k\le\frac{k+1}{n}$.

הוכחה: לפי סעיף א' לכל k קיים $\frac{k}{n}\le c_k\le\frac{k+1}{n}=x$ כך ש

$$F_k\left(\frac{k+1}{n}\right)=\frac{1}{2}f'(c_k)\left(\frac{k+1}{n}-\frac{k}{n}\right)^2=\frac{1}{2n^2}f'(c_k)$$ ולכן

$$r_n=\sum_{k=0}^{n-1}F_k\left(\frac{k+1}{n}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2n^2}f'(c_k)=\frac{1}{2n^2}\sum_{k=0}^{n-1}f'(c_k)$$ ולכן $$nr_n=\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}f'(c_k)$$

c. $f^{(1)}$ רציפה ולכן אינגרבילית , ומכאן שהראו בעזרת סכום רימן של פונקציה מתאימה את קיום הגבול הדרוש !

הוכחה: $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}f'(c_k)$ הינו סכום רימן של החלוקה של $[0,1]$ ל n קטעים שווים (הראנו שהנקודות c_k נמצאות בתוך הקטעים האלו). כאשר $n\to\infty$ פרמטר החלוקה $\frac{1}{n}\to 0$ ולכן סכום הרימן שואף לאינטגרל המסויים $\int_0^1 f'(t)dt=f(1)-f(0)$.

לסיכום $$\lim_{n\to\infty}nr_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}f'(c_k)=\frac{f(1)-f(0)}{2}$$

6. תהי f גזירה ברציפות הוכח ש $\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\sin(\lambda x)dx=0$

פתרון: f גזירה ברציפות ולכן נגזרתה אינטגרבלית. לכן יש משמעות לשיוויון

$fg=\int_a^b (fg)'=\int_a^b fg'+\int_a^b f'g$ (אחרת הביטויים בצד ימין עשויים להיות לא אינטגרביליים). שימו לב לכך שהנתון גזירה ברציפות מאד חשוב, ולא תמיד מותר להשתמש באינטגרציה בחלקים על האינטגרל המסויים.

לכן $\int_a^b f(x)\sin(\lambda x)dx=-\frac{1}{\lambda}\cos(\lambda x)f(x)\Big|_a^b+\frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(x)\cos(\lambda x)dx$. $f'(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$ ולכן חסומה בו. כמובן ש $|\cos(\lambda x)|\le 1$ ללא תלות בפרמטר, ולכן $\int_a^b f'(x)\cos(\lambda x)dx$ חסום. כמובן כן $\cos(\lambda x)f(x)\Big|_a^b$ חסום כי f רציפה בקטע. סה"כ קיבלנו גבול של $\frac{1}{\lambda}$ ששואף לאפס כפול ביטוי חסום, ולכן הגבול כולו שואף לאפס.

7. תהי f רציפה. לכל $\varepsilon>0$ נגדיר $g_\varepsilon(x)=\frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x+t)dt$

a. הוכח ש $g_\varepsilon(x)$ גזירה

הוכחה: $g_\varepsilon(x)=\frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x+t)dt=\{u=x+t\}=\frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\varepsilon+x}^{\varepsilon+x} f(u)du=\frac{F(x+\varepsilon)-F(x-\varepsilon)}{2\varepsilon}$

כאשר $F(x)=\int_0^x f(t)dt$. מכיוון ש f רציפה אזי F הקדומה שלה ולכן

$$g_\varepsilon'(x)=\frac{d}{dx}\left[\frac{F(x+\varepsilon)-F(x-\varepsilon)}{2\varepsilon}\right]=\frac{f(x+\varepsilon)-f(x-\varepsilon)}{2\varepsilon}$$

b. הוכח שלכל x מתקיים $\lim_{\varepsilon\to 0^+} g_\varepsilon(x)=f(x)$

פתרון: $\lim_{\varepsilon\to\infty}\frac{F(x+\varepsilon)-F(x-\varepsilon)}{2\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to\infty}\frac{1}{2}\left[\frac{F(x+\varepsilon)-F(x)}{\varepsilon}+\frac{F(x-\varepsilon)-F(x)}{-\varepsilon}\right]=$

$$=\frac{1}{2}(F'(x)+F'(x))= f(x)$$

8. הוכיחו שלמשוואה $\int_0^x e^{-t^2}dt = x$ יש פתרון אחד ויחיד. מהו?

פתרון: נסמן $g(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt - x$ זו פונקציה רציפה וגזירה. $g'(x)=e^{-x^2}-1$ עבור $x\neq 0$ מתקיים $g'(x)<0$ ולכן $g(x)$ הפונקציה תמיד יורדת, ובפרט יכולה לפגוש את אפס פעם אחת לכל היותר. קל לראות שהנקודה אפס הינה פתרון למשוואה.