אנליזה 1 למורים- פתרון תרגיל 7

שאלה 1

הוכיחו כי קיימת נקודה $c \in R$ עבורה מתקיים: $c^3 + c = 1$

פתרון

נגדיר פונקציה: $f(x) = x^3 + x$

F(x) פולינום ולכן פונקציה אלמנטרית ולכן רציפה בכל נקודה ובפרט בתחום: $[0,2]$

$f(0) = 0,\ f(2) = 10$.

ולכן לפי משפט ערך הביניים הפונקציה f(x) מקבלת כל אחד מהערכים בין 0 ל-10 ובפרט מקבלת ערך 1 באיזשהו נקודה.

כלומר קיימת נקודה $c \in [0,2]$ כך ש: $f(c) = 1$

כלומר מתקיים: $f(c) = c^3 + c = 1$

שאלה 2

הוכיחו כי קיים לפחות פתרון אחד למשוואה: $\ln(2+x) = x$

פתרון

נגדיר פונקציה: $f(x) = \ln(2+x) - x$

F(x) פונקציה אלמנטרית ולכן רציפה בכל תחום הגדרתה.

$x = -1$: $f(-1) = \ln(2-1) + 1 = 1 > 0$

$x = -1.9$: $f(-1.9) = \ln(2-1.9) + 1.9 - 0.401 < 0$

קיבלנו כי $f(-1) \cdot f(-1.9) < 0$

לכן, לפי משפט ערך הביניים קיימת נקודה $c \in [-1.9,-1]$ עבורה מתקיים: $f(c) = 0$

כלומר, קיים פתרון למשוואה.

שאלה 3

גזרו את הפונקציות הבאות לפי ההגדרה:

א. $f(x)=\cos(x)$

ב. $g(x)=\dfrac{2x}{x+1}$

ג. $f(x)=\sqrt{x^2+x}$

<u>פתרון</u>

א.

$$f^{'}(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-cox(x)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\left(\frac{x+h+x}{2}\right)\sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\left(\frac{2x+h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{-\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}=\left[\lim_{h\to 0}-\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\right]\left[\lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\right]=$$

$$-\sin(x)\cdot 1=-\sin(x)$$

ב.

$$g^{'}(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2(x+h)}{x+h+1}-\frac{2x}{x+1}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(2x+2h)(x+1)-2x(x+h+1)}{h(x+1)(x+h+1)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2x^2+2x+2hx+2h-2x^2-2xh-2x}{h(x+1)(x+h+1)}=\lim_{h\to 0}\frac{2h}{h(x+1)(x+h+1)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2}{(x+1)(x+h+1)}=\frac{2}{(x+1)^2}$$

ג.

$$f^{'}(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{(x+h)^2+x+h}-\sqrt{x^2+x}}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{(x+h)^2+x+h}-\sqrt{x^2+x}\right)\left(\sqrt{(x+h)^2+x+h}+\sqrt{x^2+x}\right)}{h\left(\sqrt{(x+h)^2+x+h}+\sqrt{x^2+x}\right)}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2hx+h^2+x+h-x^2-x}{h\left(\sqrt{(x+h)^2+x+h}+\sqrt{x^2+x}\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{2hx+h^2+h}{h\left(\sqrt{(x+h)^2+x+h}+\sqrt{x^2+x}\right)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h+1)}{h\left(\sqrt{(x+h)^2+x+h}+\sqrt{x^2+x}\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{(2x+h+1)}{\left(\sqrt{(x+h)^2+x+h}+\sqrt{x^2+x}\right)}$$

$$=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$$