עבור שני וקטורים במרחב $u, v \in \mathbb{R}^n$, אם קיימת מכפלה סקלרית $\langle u, v\rangle = u \cdot v$ אז מוגדרת נורמה: $\|u\| = \sqrt{u \cdot u}$.
תכונות:

I. $\|u\| \geq 0$

II. $\|u\| = 0 \iff u = 0$

III. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

IV. $\forall_{c\in\mathbb{R}} \|cu\| = |c| \|u\|$

לפי הנורמה ניתן להגדיר מרחק:

$$d(u, v) = \|u - v\|$$

תכונות:

- $d(u, v) = d(v, u)$
- $d(u, v) \geq 0$
- $u = v \iff d(u, v) = 0$
- $\forall_{v,u,w} d(u, v) + d(v, u) \geq d(u, w)$

לא תמיד אפשר להגדיר מכפלה סקלרית, נורמה או מרחב בצורה טבעית - אבל ב$\mathbb{R}^n$ יש את ההגדרה הסטנדרטית $u \cdot v = \delta_{ij} u^i v^j$

איזומטריות של המרחב

איזומטריה היא פונקציה $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ המקיימת

$$\forall_{u,v} d(u, v) = d(f(u), f(v))$$

איזומטריות עבורן $f(0) = 0$

משפט

אם f איזומטריה המקיימת $f(0) = 0$ אזי f משמרת את המכפלה הסקלרית(כלומר לכל u, v $f(u) \cdot f(v) = u \cdot v$)

הוכחה

אל האיזומטריה משמרת מרחקים וכן את ה0, אזי לכל v:

$$\|v\| = d(v,0) = d(f(v), f(0)) = d(f(v), 0) = \|f(v)\|$$

נפעיל את הכלל הזה על הווקטור $u - v$:

$$\|u-v\| = \|f(u) - f(v)\|$$

נעלה בריבוע לקבל:

$$(u-v)(u-v) = [f(u) - f(v)][f(u) - f(v)]$$

$$\cancel{\|u\|^2} - 2u \cdot v + \cancel{\|v\|^2} = \cancel{\|f(u)\|^2} - 2f(u) \cdot f(v) + \cancel{\|f(v)\|^2}$$

$$u \cdot v = f(u) \cdot f(v)$$

■

משפט

אם f איזומטריה המקיימת $f(0) = 0$ אזי קיימת מטריצה אורתוגונלית[1] A כך ש

$$\forall_v f(v) = A(v)$$

הערה: זה אומר שהאיזומטריות היחידות על $\mathbb{R}^n$ הן סיבובים ושיקופים.

הוכחה

נבחר בסיס אורתונורמלי e_i $(i = 1, \dots n)$ ל$\mathbb{R}^n$. נבדוק כיצד f פועלת על וקטורי הבסיס:

$$\|f(e_i)\| = \|e_i\| = 1$$

$$f(e_i) \cdot f(e_j) = e_i \cdot e_j = 0$$

לכן גם $f(e_i)$ מהווים בסיס אורתונורמלי ל$\mathbb{R}^n$.
לכל וקטור v מתקיים ש$v \cdot e_i = f(v) \cdot f(e_i)$. מכאן נובע מיידית ש$f(v) = \sum v^i f(e_i)$

■

[1] מטריצה A תיקרא אורתוגונלית אם $A^t A = I$. זוהי מטריצה הבנויה מווקטורים אורתונורמליים

הערה

המטריצה A היא מטריצת הבסיס החדש:

$$A=\begin{pmatrix} | & | & | \\ f\left(e_1\right) & f\left(e_2\right) & \cdots \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

משפט

אם f איזומטריה כלשהי אזי קיימים A אורתוגונלית ווקטור b כך ש$f\left(v\right)=Av+b$

הוכחה

נגדיר $b:=f\left(0\right)$. אזי גם $g\left(v\right):=f\left(v\right)-b$ היא איזומטריה, והיא גם מקיימת $g\left(0\right)=0$.
לפי המשפט הקודם $g\left(v\right)=Av$, ולכן $f\left(v\right)=Av+b$.

■

החבורה האורתוגונלית

החבורה האורתוגונלית $O\left(n\right)\in M_n$ מוגדרת:

$$A\in O\left(n\right)\iff A^tA=I$$

החבורה האורתוגונלית המיוחדת $SO\left(n\right)$ מוגדרת:

$$A\in SO\left(n\right)\iff A^tA=I\wedge\det A=1$$

איזומטריה משמרת אוריינטציה

איזומטריה שמקיימת $f\left(0\right)=0$ נחשבת למשמרת אוריינטציה אם

$$\det\begin{pmatrix} | & | & | & | \\ f\left(e_1\right) & f\left(e_2\right) & \cdots & f\left(e_n\right) \\ | & | & | & | \end{pmatrix}=1$$

אלה האיזומטריות שעבורן מטריצת המעבר היא ב$SO\left(n\right)$.

הערה

עבור איזומטריה כללית ניתן ליצור g המקיימת $g(0)=0$ ־ ועליה אפשר לקבוע אם היא משמרת אוריינטציה או לא.

עקומה ב$\mathbb{R}^n$

עקומה ה$\mathbb{R}^n$ היא פונקציה $\gamma(t):\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ המוגדרת ע"י $\gamma(t)=\begin{pmatrix}\gamma^1(t)\\ \gamma^2(t)\\ \gamma^3(t)\end{pmatrix}$

אורך של עקומה L מוגדר ע"י

$$L=\int_a^b\sqrt{\sum_i\left(\frac{\mathrm{d}\gamma^i}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

לדוגמה: במקרה של $\mathbb{R}^2$: $L=\int\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x$

משיק לעקומה מוגדר להיות וקטור $v=\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}$. לכן ניתן לכתוב

$$L=\int_a^b\|v\|\,\mathrm{d}t$$

הגדרה

פרמטריזציה נורמלית היא פרמטריזציה $\gamma(t)$ עבורה $\forall_t\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\neq 0$.

פרמטריזציה טבעית

נגדיר $s=\int_0^t\sqrt{\sum_i\left(\frac{\mathrm{d}\gamma^i}{\mathrm{d}q}\right)^2}\,\mathrm{d}q$. אינטגרל זה מגדיר פונקציה $s(t)$. זוהי פונקציה מונוטונית עולה ולכן הפיכה ־ כלומר מוגדר $t(s)$.

$$\gamma(s):=\gamma(t(s))$$

דוגמה

$$\gamma(t)=\begin{pmatrix}t\\ t\end{pmatrix}$$

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$s = \int_0^t \sqrt{2}\,\mathrm{d}q = \sqrt{2}t$$

$$t = \frac{s}{\sqrt{2}}$$

$$\gamma(s) = \begin{pmatrix} \frac{s}{\sqrt{2}} \\ \frac{s}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}s} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

מוסכמה

כאשר נסמן את הפרמטר בs, הכוונה היא שמדובר בפרמטריזציה טבעית

תכונה חשובה

ווקטור המשיק של פרמטריזציה טבעית הוא תמיד וקטור יחידה:

$$s = \int_0^t \left\| \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}q} \right\| \mathrm{d}q$$

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \left\| \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} \right\|$$

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} \left\| \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} \right\|^{-1}$$

$$\implies \left\| \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}s} \right\| = 1$$

משפט

אורך עקומה הוא אינווריאנטי תחת איזומטריה

הוכחה

$$\tilde{\gamma} = f(\gamma) = A\gamma + b$$

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\gamma}}{\mathrm{d}t} = A\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\gamma}}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}\tilde{\gamma}}{\mathrm{d}t} = \left(A\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\right)^t \left(A\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\right) = \left(\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\right)^t A^t A \left(\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}$$

$$\implies \|\tilde{\gamma}'\| = \|\gamma'\|$$

$$\int \|\tilde{\gamma}'\| \, \mathrm{d}t = \int \|\gamma'\| \, \mathrm{d}t$$

$\blacksquare$

וקטור טנגנטי ונורמלי

עבור פרמטריזציה טבעית $\gamma(s)$, הוקטור הטנגנטי לעקומה יוגדר להיות

$$\hat{T}(s) = \frac{\mathrm{d}\gamma(s)}{\mathrm{d}s}$$

נשים לב שע"פ ההגדרה הקודמה, $\forall_s \left\|\hat{T}(s)\right\| = 1$

עבור $\mathbb{R}^2$(במישור), $\hat{T}(s) = \begin{pmatrix} \cos\alpha(s) \\ \sin\alpha(s) \end{pmatrix}$ כאשר γ היא הזווית בין המשיק לציר הx.

נגדיר וקטור נורמלי $\hat{N}(s)$ כוקטור יחידה המאונך ל$\hat{T}(s)$ ויוצר איתו בסיס ימני ־ כלומר $\det\begin{pmatrix} | & | \\ \hat{T}(s) & \hat{N}(s) \\ | & | \end{pmatrix}$

תנאי שקול:

$$\hat{N} = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} \cdot \hat{T}(s) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \hat{T}(s) = \begin{pmatrix} -\sin\alpha(s) \\ \cos\alpha(s) \end{pmatrix} \cdot \hat{T}(s)$$

עקמומיות של עקומה

מסומנת באות היוונית kappa: κ. מוגדרת להיות

$$\kappa := \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}$$

כלומר כמה מהר משתנה הזווית כאשר הולכים לאורך העקומה במהירות 1.
נשים לב:

$$\frac{\mathrm{d}\hat{T}\left(s\right)}{\mathrm{d}s}=\begin{pmatrix}-\sin\alpha\left(s\right)\\ \cos\alpha\left(s\right)\end{pmatrix}\frac{\mathrm{d}\alpha\left(s\right)}{\mathrm{d}s}=\hat{N}\left(s\right)\kappa\left(s\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{N}}{\mathrm{d}s}=-\kappa\left(s\right)\hat{T}\left(s\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}^{2}\hat{T}\left(s\right)}{\mathrm{d}s^{2}}=-\kappa\left(s\right)^{2}\hat{T}\left(s\right)$$

הערה

$$\left\Vert \hat{T}\left(s\right)\right\Vert =1$$

משפט

יהי $v\left(t\right)$ פונקציה וקטורית של t. אזי

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\perp v\iff\left\Vert v\right\Vert \cdot\mathrm{const}$$

הוכחה

$$v\cdot v=\mathrm{const}\iff\left\Vert v\right\Vert =\mathrm{const}$$

$$\frac{\mathrm{d}\left(v\cdot v\right)}{\mathrm{d}t}=2\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\cdot v=0\iff v\perp\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

הערה

$$\hat{N}=\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}s}$$

$$\implies\gamma=\int\hat{T}\,\mathrm{d}s+\gamma_{0}$$

מסקנה

אם ידוע $\hat{T}(s)$ וכן נקודת ההתחלה γ_0 אזי אנחנו יודעים את כל המסלול $\gamma(s)$

משפט

אם יודעה נקודת ההתחלה γ_0 וידוע $\hat{T}(0)$ אזי הפונקציה $\kappa(s)$ מגדירה חד־ערכית את העקומה $\gamma(s)$.

הוכחה

אם ידוע $\hat{T}(0)$ נחשב $\hat{N}(0)$, ואז מערכת המד"ר:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}\hat{T}(s)}{\mathrm{d}s} = \kappa\hat{N}(s) \\ \frac{\mathrm{d}\hat{N}}{\mathrm{d}s} = -\kappa\hat{T}(s) \end{cases}$$

היא מערכת מסדר I לינארית הומוגנית, ולכן מקיימת את משפט הקיום והיחידות, ולכן יש לה פתרון יחיד שנותן $\hat{N}(s), \hat{T}(s)$ לכל s.

■

מסקנה

עקומה מוגדרת על ידי העקמומיות שלה עד כדי איזומטריה של המישור.

הערה

לעקמומיות ב$\mathbb{R}^2$ יש סימן, אבל כשנגדיר עקמומיות ב$\mathbb{R}^3$, נראה שאין הגיון לדבר שם על סימן $\pm$.

הערה

מרכז המעגל המשיק לעקומה בנקודה s הוא:

$$E(s) = \gamma(s) + \frac{1}{\kappa}\hat{N}(s)$$

אם נתבונן בכל הנקודות אזי $E(s)$ מגדיר עקומה הנקראת האוולט של $\gamma(s)$. האינוולט של $\gamma(s)$ הוא העקומה ש$\gamma(s)$ היא האוולנט שלה ־

$$I(s) = \gamma(t) - s(t)\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'\|(t)}$$