תרגיל בית 3 בתורת החבורות
88-218 סמסטר א' תש"ף

שאלה 1 (חימום)**.** הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. כל חבורה ציקלית היא אבלית.

ב. כל חבורה אבלית היא ציקלית.

ג. אם $o(a) = n$, אז $a^{-1} = a^{n-1}$.

שאלה 2 (חימום)**.** כתבו את לוחות הכפל של U_5, U_8 ובדקו האם הן ציקליות.

שאלה 3. תהי G חבורה, ותהי $\varnothing \neq H \subseteq G$ תת־קבוצה לא ריקה.

א. הוכיחו שאם G חבורה סופית, אז כדי להוכיח ש-H היא תת־חבורה של G מספיק לבדוק סגירות לפעולה.

ב. הפריכו את הסעיף הקודם כאשר G אינסופית.

שאלה 4. תהי G חבורה ויהיו $a, b \in G$ איברים. הוכיחו כי $o(ab) = o(ba)$.
זהירות: לא הנחנו שהחבורה אבלית או שהסדרים סופיים.

שאלה 5. מצאו את כל המספרים השלמים $x \in \mathbb{Z}$ המהווים פתרון לכל אחת מהמשוואות הבאות:

א. $33x \equiv 1 \pmod{218}$

ב. $-7x + 3 \equiv 9 \pmod{30}$

שאלה 6. זה בסדר לדחות את השאלה הזאת לשבוע הבא.

א. יהיו $a, b, c \in \mathbb{Z}$. הוכיחו כי $(a, b) = (a, c) = 1$ אם ורק אם $(a, bc) = 1$.
רמז: אפשר להעזר בשאלה 4 מתרגיל הבית הראשון.

ב. פונקציית אוילר $\varphi(n)$ מתאימה לכל $n \in \mathbb{N}$ כמה מספרים טבעיים קטנים וזרים ל-n יש. כלומר

$$\varphi(n) = |\{a \,|\, 0 < a < n,\ (a, n) = 1\}|$$

הוכיחו כי $(n, m) = 1$ אם ורק אם $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$.

ג. הוכיחו שכשסוכמים את פונקציית אוילר על פני כל המחלקים (הטבעיים) של n מקבלים

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d)$$

רמז: יש כל מיני דרכים לפתור את זה. אחת הדרכים היא עם חבורות ציקליות. הזכרו כמה יוצרים יש לחבורה ציקלית וכי כל תת־חבורה שלה היא ציקלית.

שאלות רשות

שאלה 7. תהי G חבורה סופית. הוכיחו כי מספר האיברים מסדר 3 הוא זוגי (אולי אפס).
מה לגבי מספר האיברים מסדר p כאשר p מספר ראשוני אי זוגי?

שאלה 8. מצאו חבורה אינסופית שלכל $n \in \mathbb{N}$ קיים בה איבר מסדר n. האם אתם יכולים גם להבטיח שהסדר של כל האיברים הוא סופי?

כמו כן, לכל $m > 1$ מצאו חבורה אינסופית G_m שהסדר של כל איבר בה הוא לכל היותר m.

האם אתם יכולים למצוא דוגמאות לשאלות האלו כך שהחבורות הן מעוצמה $\aleph_0$?

בהצלחה!