שיטות נומריות ותכנון מדעי - הרצאה 3

אינטגרציה נומרית - המשך

תזכורת: נקרב את $\int_a^b f(t)\underbrace{w(t)}_{>0}dt$ ע"י $\sum_{j=0}^{n-1} \underbrace{b_j}_{\text{מקדמים}} \underbrace{f(c_j)}_{\text{צמתים}}$

אם לכל $i\neq j$, $c_i\neq c_j$, אז אם נבחר $b_j=\int_a^b p_j(t)w(t)dt$
כאשר $p_j(t)$ הוא פולינום לגרנז' עבור $c_0,\dots,c_{n-1}$
$p_j(c_i)=\delta_{ij}$ נקבל סכימה מסדר n. הסכימה מדויקת לכל פולינום מסדר $n-1$ ומטה.

פולינום מסדר n יקרא הפולינום האורתוגונלי אם הוא הפולינום המוני היחיד המקיים $p\perp\mathbb{P}_{n-1}$.

$$\langle f,g\rangle=\int_a^b f(t)g(t)w(t)dt$$

משפט: כל n האפסים של פולינום אורתוגונלי p_n נמצאים בקטע (a,b)

הוכחה: עבור $n\geq 1$, $p_n\perp\mathbb{P}_0\Rightarrow p_n\perp 1$

$$\Rightarrow\int_a^b p_n(t)\cdot 1\cdot\underbrace{w(t)}_{>0}dt=0$$

לכן $p_n(t)$ מחליף סימן לפחות פעם אחת ב (a,b).
נסמן ב: $x_1,\dots,x_k$ את האפסים של $p_n(t)$ ב (a,b),
$k\geq 1$. צריך להראות $k=n$.
נניח בשלילה $k\leq n-1$. נגדיר $q(t)=\prod_{j=1}^{k}(t-x_j)$

$$\Leftarrow p_n\perp q \Leftarrow q\in\mathbb{P}_{n-1}$$

$$\int_a^b \underbrace{p_n(t)q(t)}_{\substack{\text{סימן קבוע}\\ \text{או אי שלילי}\\ \text{או אי חיובי}}}\underbrace{w(t)}_{>0}dt=0$$

המכפלה לא מחליפה סימן וזו סתירה כי האינטגרל של פונ' אי שלילית או אי חיובית לא יכול להתאפס אלא אם האינטגרנד=0. מש"ל

משפט: כל האפסים של פולינומים אורתוגונליים הם פשוטים.
(ריבוי = 1)

הוכחה: נניח בשלילה שלא. בה"כ נניח $x_1=x_2$.

$$p_n(t)=(t-x_1)^2\cdot\prod_{i=3}^{n}(t-x_i)$$ לכן

נגדיר $q(t)=\prod_{i=3}^{n}(t-x_i)$ $\Rightarrow$ $p_n(t)q(t)\geq 0$

$q(t)\in\mathbb{P}_{n-2}$ $\Rightarrow$ $$\int_a^b p_n(t)q(t)\underbrace{w(t)}_{>0}=0$$

סתירה. אינטגרל אי שלילי לא קבוע 0 ■

משפט: (Gauss) נבחר את n הצמתים הסכימה הנומרית כשורשים של $p_n(t)$, נסמן $c_0,\dots,c_{n-1}$.

נבחר $$b_j=\int_a^b p_j(t)w(t)dt$$

אז הסכימה היא מספר $2n$.
בנוסף, לא קיימת סכימה מספר גבוה יותר.

הוכחה: צ"ל: הסכימה מדויקת לכל פולינום מספר $2n-1$.
יהי $\hat{p}(t)$ פולינום מספר $2n-1$. צ"ל

$$\int_a^b \hat{p}(t)w(t)dt=\sum_{j=0}^{n-1}b_j\hat{p}(c_j)$$

נחלק את $\hat{p}$ בפולינום האורתוגונלי ה-n p_n.

$$\hat{p}=p_n(t)\underbrace{q(t)}_{\substack{\text{מנה}\\ \in\mathbb{P}_{n-1}}}+\underbrace{r(t)}_{\text{שארית}}\in\mathbb{P}_{n-1}$$

נתבונן ב:
$$\int_a^b\hat{p}(t)w(t)dt=\int_a^b[p_n(t)q(t)+r(t)]w(t)dt=$$
$$=\overbrace{\int_a^b p_n(t)q\,w\,dt}^{=0}+\int_a^b r\,w\,dt$$

11.03.14 (2)

<u>בנוסף:</u> (צד ימין)

$$\sum_{j=0}^{n-1} b_j\,\hat{p}(c_j)=\sum_{j=0}^{n-1} b_j\left[\underbrace{p_n(c_j)}_{=0}q(c_j)+r(c_j)\right]=$$

$$=\sum_{j=0}^{n-1} b_j\,r(c_j)\ \left(=\int_a^b r w\,dt\right)$$

(מה שקיבלנו מצד שמאל)

כי $r\in\mathbb{P}_{n-1}$ והסכימה לפחות מסדר n.

<u>הוכחת יחידות:</u> נניח שישנם משקלים $b_0,\dots,b_{n-1}$ וצמתים $c_0,\dots,c_{n-1}$ הנותנים סכימה מסדר $2n+1$.

נסמן $\hat{p}(t)=\prod_{j=1}^{n}(t-c_j)^2\in\mathbb{P}_{2n}$ ולכן הסכימה מדויקת עבורו. $\Leftarrow$

$$\int_a^b \underbrace{\hat{p}(t)}_{\geq 0}\underbrace{w(t)}_{>0}\,dt=\sum_{j=0}^{n-1} b_j\,\underbrace{\hat{p}(c_j)}_{=0}$$

וזו סתירה. ∎

<u>קירוב פונקציות שאינן פולינומים:</u>

על סכימה מסדר $n\geq p$, נניח $f\in C^p$.

נניח w חסומה ב $[a,b]$.

נקרב את f ע"י טור טיילור סביב a:

$$f(x)=\underbrace{T_{p-1}(x-a)}_{\text{פול' טיילור מסדר } p-1}+\frac{1}{p!}f^{(p)}(x^*)(x-a)^p$$

$$x^*\in[a,b]$$

השגיאה של הסכימה:

$$\left|\int_a^b f(t)w(t)\,dt-\sum_{j=0}^{n-1} b_j f(c_j)\right|=$$

$$=\left|\underbrace{\boxed{\int_a^b T_{p-1}(t-a)w(t)\,dt-\sum_{j=0}^{n-1} b_j T_p(c_j-a)}}_{=0}+\int_a^b \frac{1}{p!}\underbrace{f^{(p)}}_{\leq M}(x^*)(x-a)^p w(x)\,dx-\sum_{j=0}^{n-1} b_j\frac{1}{p!}f^{(p)}(c_j^*)(c_j-a)^p\right|\leq$$

$$\leq \frac{M}{p!}\left|\int_a^b w(t)(t-a)^p\,dt-\sum_{j=0}^{n-1} b_j \underbrace{(c_j-a)^p}_{\leq (b-a)^p}\right|$$

$$\leq \frac{M(b-a)^p}{p!}\Bigg(\underbrace{\left|\int_a^b w(t)\,dt\right|}_{\leq M_2(b-a)\ \text{כי W חסומה}}+\underbrace{\left|\sum_{j=0}^{n-1} b_j\right|}_{=\int_a^b w(t)dt\leq M_2(b-a)}\Bigg)\leq \frac{C\cdot(b-a)^{p+1}}{p!}$$

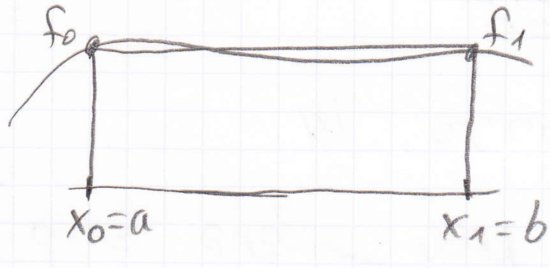
<u>שריג אחיד:</u> אינטגרציה על $[a,b]$

$x_0=a\ ,\ x_n=b\quad ,\ x_j=x_0+j\cdot h\ :\ j=0,\dots,n$

$$\boxed{h=\frac{b-a}{n}}$$

נניח $w=1$: נסמן $f_j=f(x_j)$

<u>$n=2$</u>:



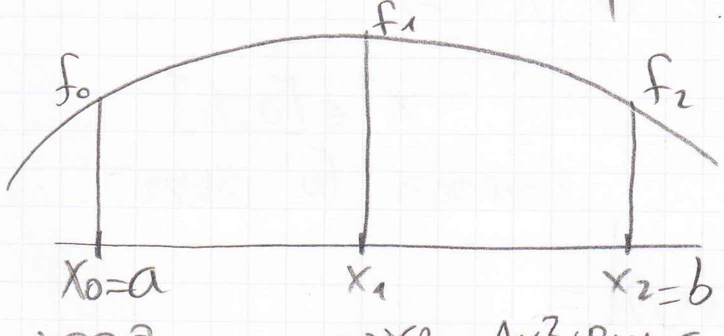
קירוב לפי כלל הטרפז

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)\cdot\frac{f_0+f_1}{2}=\frac{b-a}{2}(f_0+f_1)$$

כלל סכימה מספר 2.

ניתן לבדוק שהכלל מדויק לפי בסיס ל P_1 : $\{1,x\}$.

<u>$n=3$</u>:



נמצא פרבולה Ax^2+Bx+C שעוברת דרך:

$\xleftarrow{\text{מערכת לינארית } 3\times3}$ (a,f_0) , $(\frac{a+b}{2},f_1)$ ו (b,f_2) ונקרב את

$\int_a^b f(x)dx$ ע"י $\int_a^b (Ax^2+Bx+C)dx$

11.03.14 (3)

$$\int_a^b (Ax^2+Bx+c)\,dx = \frac{A}{3}(b-a)^3 + \frac{B}{2}(b-a)^2 + c(b-a)$$

<u>סימפסון:</u> (כנראה הראשון שהשתמש בשיטה כזו)

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{b-a}{6}\left(f_0+4f_1+f_2\right) \longrightarrow$$ ~~סכימה מספר~~ 3 (*)

וכן הלאה במקרים נוספים ל $n \geq 2$

סכימות עם n נק', התאמת פולינום מספר $n-1$ ואינטגרציה של הפולינום.

$$f = \underbrace{c_0 + c_1(x-x_1) + c_2(x-x_1)^2}_{\text{לזה יש סכימה מדויקת}} + \underbrace{c_3(x-x_1)^3}_{=c_3\left\{\frac{1}{4}\left(b-\frac{a+b}{2}\right)^4 - \frac{1}{4}\left(a-\frac{a+b}{2}\right)^4\right\} = 0} + \cdots$$

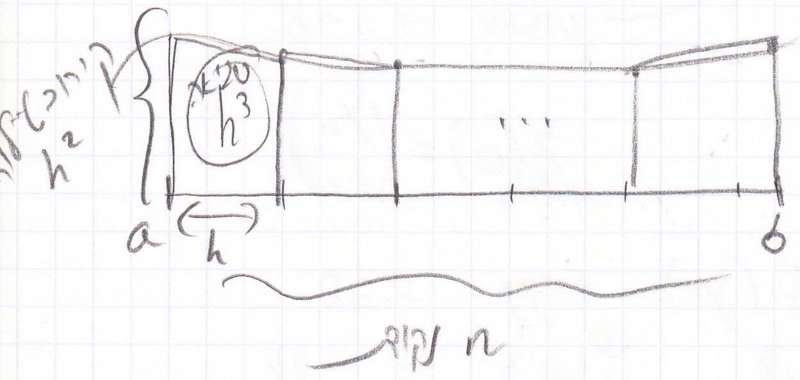
ולכן הסכימה תהיה מדויקת עד לאיבר השלישי

(*) לכן הסכימה היא מספר 4 בגלל סימטריה.

(בכל מקרה אי זוגי נקבל סכימה מדויקת בגבוה באחד בגלל סימטריה)

כללים מורחבים:

1. כלל הטרפז:



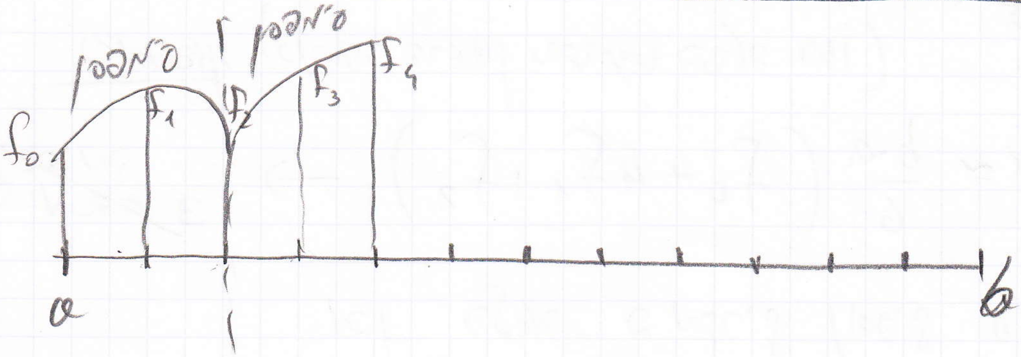
$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} h \cdot \frac{f_j + f_{j+1}}{2} = \frac{h}{2}\left(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n\right)$$

השגיאה בכל טרפז: $O(h^3)$

השגיאה בסה"כ: $O(nh^3) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ כי $h = \frac{b-a}{n}$

2. כלל סימפסון המורחב: נבחר $n=2k$ זוגי



$$\frac{h}{3}\left(f_0+4f_1+f_2+f_2+4f_3+f_4+\dots\right)$$

$$=\frac{h}{3}\left(f_0+4f_1+2f_2+4f_3+2f_4+\dots+4f_{n-1}+f_n\right)$$

שגיאה: $O(h^5 n)=O\left(\frac{1}{n^4}\right)$

מד"ר (עם תנאי התחלה)

$$y'=f(t,y) \quad , \quad x(t_0)=y_0$$

להפטר מהזמן $\leftarrow$

$$z=\begin{pmatrix} y \\ t \end{pmatrix}$$

$$z'=\begin{pmatrix} f(t,y) \\ 1 \end{pmatrix} \qquad z(0)=\begin{pmatrix} y_0 \\ t_0 \end{pmatrix}$$

בה"כ נניח $y'=f(y)$ (משוואות אוטונומיות)

אם f ליפשיץ $\forall x,y \ |f(x)-f(y)|\le k|x-y|$

(גזירה $\rightarrow$ ליפשיץ $\rightarrow$ רציפה)

אז ק"ם פתרון בקטע סופי $[0,T]$ והוא יחיד.

דוגמא: לפונ' עם פתרון רק בקטע:

$$x'=x^2 \Rightarrow \frac{dx}{dt}=x^2 \Rightarrow \frac{dx}{x^2}=dt$$

$$x=-\frac{1}{t+c} \Leftarrow -\frac{1}{x}=t+c$$

$x(0)=1$

$\Downarrow$

$c=-1$

$x=-\frac{1}{t-1}$

11.03.14 (4)

<u>דוגמא</u>

$x' = \sqrt{x}$ $\quad$ $x(0)=0$

לא מקיים את תנאי ליפשיץ ולכן

פתרון $x(t)=0$

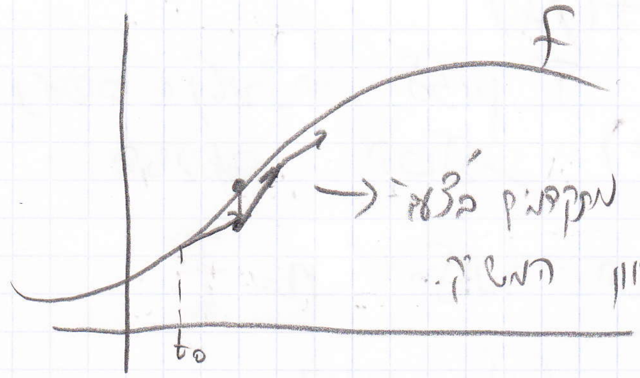
$x(t) = ct^2 \Rightarrow x' = 2ct = \sqrt{x} = \sqrt{c}\,t$

$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}t^2 \Leftarrow \quad c = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftarrow 2c = \sqrt{c}$

אין יחידות פתרון

<u>שיטת אוילר</u>

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$



בכל פעם מתקדמים בצעד קטן בכיוון המשיק.

$$y(t) = \underbrace{y(t_0)}_{y_0} + \int_{t_0}^{t} f(y(s))\,ds = \#$$

נקרב את $y(s)$ כטור טיילור מסדר ראשון

$$y(s) = y(t_0) + y'(t_0)(s-t_0) + o(|t-t_0|^2)$$

$$f(y(s)) = f(y(t_0) + \underbrace{y'(t_0)(s-t_0)}_{(\text{אפשר מלי או } o(|t-t_0|))} + o(|t-t_0|^2)) =$$ פיתוח שוב לפי טיילור

$$= f(y(t_0)) + o(s-t_0)$$

$$y(t) = y(t_0) + \underbrace{\int_{t_0}^{t} f(y(t_0))\,ds}_{tf(y(t_0))} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} o(s-t_0)\,ds}_{o((t-t_0)^2)}$$

שיטת אוילר: נניח $t_0=0$. נסמן y_k כקירוב של $y(t)$ בנקודה $t_k=h\cdot k$.

y_0 ידועים

$O(h^2)$ שגיאה לוקאלי

$$y_1 = y_0 + h\cdot f(y_0) \to O(h^2) \quad \text{שגיאה}$$

$$y_2 = y_1 + hf(y_1) \to O(h^2) \quad \text{שגיאה}$$

$$\vdots$$

$$y_{k+1} = y_k + hf(y_k)$$

נעשה איטרציה לזמן T, בכל צעד שגיאה $O(h^2)$

השגיאה הכולל $n\cdot O(h^2)$

n ← מספר הצעדים.

$n=\frac{T}{h}$ כלומר השגיאה:

$$O\left(\frac{T}{h}\cdot h^2\right)=O(h)$$

שגיאה גלובלי

הגדרה: שיטה נומרית עם צעד h נקראת מתכנסת אם עבור f חלקה מספיק ובגבול $h\to 0^+$ השגיאה המקסימאלי שואפת לאפס, כלומר

$$\lim_{h\to 0^+}\max_{j=0,\dots,\frac{T}{h}} |y_j - y(t_j)| = 0$$

קירוב נומרי בזמן [illegible]

הפתרון המדויק בזמן t_j

משפט: שיטת אוילר מתכנסת עבור $f\in C^1$.

הוכחה: נסמן $e_n = y(t_n) - y_n$ נפתח את $y(t_{n+1})$ סביב t_n.

$$y(t_{n+1}) = y(t_n+h) = y(t_n) + h\underbrace{y'(t_n)}_{f(y(t_n))} + \frac{h^2}{2}\underbrace{y''(t_n^*)}_{\frac{d}{dt}y'(t_n^*)}$$

$$f'(y(t_n^*))\cdot y'(t_n)$$

חסומים

$$f(t_n^*)$$

11.03.14 (5)

$$(1) \quad y(t_{n+1}) = y(t_n) + h f(y(t_n)) + \underbrace{\frac{h^2}{2} y''(t_n^*)}_{\text{תחום}}$$

לפי טלר אוילר

$$(2) \quad y_{n+1} = y_n + h f(y_n)$$

$$(1)-(2) = y(t_{n+1}) - y_{n+1} = y(t_n) - y_n + h\left(f(y(t_n)) - f(y_n)\right) + \underbrace{\frac{h^2}{2} y''(t_n^*)}_{\text{תחום}}$$

$$e_{n+1} = e_n + h\left[f(y_n) + f'(y_n^*)e_n - f(y_n)\right] + \text{תחום}$$

הסבר:

$$y(t_n) = y_n + e_n$$

$$\Rightarrow f(y(t_n)) = f(y_n + e_n) \overset{\text{טיילור}}{=} f(y_n) + f'(y_n^*)e_n$$

בסה"כ קיבלנו:

$$e_{n+1} = e_n + h f'(y_n^*) e_n + \frac{h^2}{2} y''(t_n^*)$$

$$= \left[1 + h \underbrace{f'(y_n^*)}_{|f'| \le c_1}\right] e_n + \frac{h^2}{2} \underbrace{y''(t_n^*)}_{|y''| \le c_2}$$

$$|e_{n+1}| \overset{\text{א.שוויון המשלש}}{\le} (1 + c_1 h)|e_n| + h^2 c_2$$

טענה:

$$|e_n| \le h \frac{c_2}{c_1}\left[(1 + h c_1)^n - 1\right]$$

הוכחה: באינדוקציה:

$$e_0 = 0 \le 0$$

$$|e_{n+1}| \le (1+c_1 h)|e_n| + h^2 c_2 \underset{\text{הנחת האינדוק'}}{\le}$$

$$\le (1+c_1 h)\cdot h\frac{c_2}{c_1}\left[(1+hc_1)^n - 1\right] + h^2 c_2 =$$

$$= h\frac{c_2}{c_1}(1+c_1 h)^{n+1} - (1+\cancel{c_1 h})h\frac{c_2}{c_1} + \cancel{h^2 c_2}$$

$$= h\frac{c_2}{c_1}\left[(1+hc_1)^{n+1} - 1\right]$$

הוכחת הלמה

ניתן להראות

$$|e_n| \xrightarrow[h \to 0^+]{} 0$$

$$|e_n| \le h\frac{c_2}{c_1}\left[\underbrace{(1+hc_1)^n}_{\text{גדל עם } n} - 1\right] \le \qquad n \le \frac{T}{h}$$

$$\le h\frac{c_2}{c_1}\left[\underbrace{(1+c_1 h)^{\frac{T}{h}}}_{\substack{h\to 0 \\ \le e^{c_1 T}}} - 1\right] \le h\frac{c_2}{c_1}\left(e^{c_1 T} - 1\right) \xrightarrow[h \to 0^+]{} 0$$

השגיאה הגלובלית $O(h)$