שיעורי בית 7

20 בדצמבר 2015

1. תהא G חבורה סופית. נסמן ב $\sim$ את יחס הצמידות.

(א) יהא $x \in G$, ונסמן $H = C(x) = \{g \in G \,:\, gx = xg\}$ המרכז של x. נגדיר יחס שקילות נוסף על G:

$$g_1 \equiv g_2 \iff g_1^{-1} g_2 \in H$$

הוכח כי גודל קבוצת המנה שווה לגודל מחלקת הצמידות של x. כלומר

$$\left|{}^{G}/_{\equiv}\right| = \left|[x]_{\sim}\right|$$

הדרכה: הראו שניתן להגדיר פונקציה

$$f : {}^{G}/_{\equiv} \to [x]_{\sim}$$

ע"י

$$\forall [g]_{\equiv} \in {}^{G}/_{\equiv} \,:\, f([g]_{\equiv}) = gxg^{-1}$$

ושפונקציה זאת חח"ע ועל.

(ב) השתמשו בסעיף הקודם להסיק כי גודל מחלקת צמידות מחלק את גודל החבורה. כלומר לכל $x \in G$ מתקיים

$$|G| = k \left|[x]_{\sim}\right|$$

עבור kשלם כלשהוא.

2. תהא G חבורה עם p^n איברים (p מספר ראשוני, n מספר טבעי) הוכיחו כי במרכז של G קיים יותר מאיבר אחד (כמובן שהאיבר הנטראלי תמיד שייך למרכז..) כלומר

$$|Z(G)| > 1$$

הדרכה: השתמשו בכך ש

(א) Gהיא איחוד זר של מחלקות צמידות. (ומה גודל מחלקת שקילות של איבר במרכז?)

(ב) בשאלה הקודמת

(ג) בחבורה $\mathbb{Z}_p$ (שקילות מספרים שלמים מודולו p)

3. תהא G חבורה סופית . H תת חבורה של G ו K תת חבורה של H. הוכח כי

$$|{}^{G}/_{K}| = |{}^{G}/_{H}| \cdot |{}^{H}/_{K}|$$

.4

(א) תהא G חבורה. יהא $g \in G$ מסדר n (n טבעי). יהא $n = ab$ פירוק של המספר n. הוכח כי הסדר של g^a הוא b

(ב) טענה: תהא G חבורה בת p^n איברים (כאשר p מספר ראשוני ו n מספר טבעי). הוכח כי קיים $g \in G$ מסדר p. (רמז: ניתן להוכיח טענה זאת באינדוקציה).

.5

(א) תהא G חבורה. H תת חבורה. הוכח כי מספר הקוסטים השמאליים שווה למספר הקוסטים הימניים.
כלומר הקבוצות$K_1 = \{gH \,|g \in G\}$ $K_2 = \{Hg \,|g \in G\}$בעלות עוצמה שווה.
(הדרכה : הגדר $\phi : K_1 \to K_2$ ע"י $\phi(gH) = Hg^{-1}$. הוכח כי ϕ מוגדרת היטב, חח"ע ועל)

(ב) תהא G חבורה. H ת"ח. הוכח כי אם הסדר של ${}^{G}/_{H}$ הוא 2 אז מתקיים כי

$$\forall g \in G : \; gH = Hg$$