מבנים אלגבריים למדעי המחשב (89 – 214)
מבחן מסכם, מועד ב'
סמסטר א' תשע"ו

מרצה: מיכאל משה שיין.

משך הבחינה: שלוש שעות. כל חומר עזר אסור.

יש לענות על ארבע שאלות ולסמן בתחילת המחברת על איזה שאלות החלטת לענות. אחרת ארבעה הפתרונות הראשונים המופיעים במחברת יבדקו. יש לנמק את כל הטענות שלך. בהצלחה!

1. תהי G חבורה ותהיינה $H, K \leq G$ שתי תת־חבורות כך שאף אחת מהן לא מכילה את השניה. כלומר, לא מתקיים $H \subseteq K$ וגם לא $K \subseteq H$. הוכח כי האיחוד $H \cup K$ אינו תת־חבורה של G.

2. (א) מיין את החבורות האבליות מסדר 90. כלומר, הצג רשימה של חבורות כך שכל חבורה אבלית מסדר 90 תהיה איזומורפית לאחת, ורק אחת, מן החבורות ברשימתך.

   (ב) להלן שלוש חבורות אבליות מסדר 90. לאיזו חבורה ברשימה שלך כל אחת מהן איזומורפית?

   i. $\mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_5$.

   ii. $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{10}$.

   iii. $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_9$.

3. (א) נסח הגדרה של מספר מעין ראשוני.

   (ב) יהי k מספר טבעי כך ששלושת המספרים $6k+1, 12k+1, 18k+1$ כולם ראשוניים. הוכח כי $(6k+1)(12k+1)(18k+1)$ הינו מספר קרמייקל. תזכורת: מספר שהוא מעין ראשוני אבל אינו ראשוני נקרא מספר קרמייקל.

4. נסמן ב־ $\mathbb{F}_q$ את השדה בעל q איברים. יהי $P(x) = x^2 + [2]x + [2]$.

   (א) הוכח כי $P(x)$ אי פריק מעל השדה $\mathbb{F}_7$.

   (ב) הוכח כי $P(x)$ פריק מעל השדה $\mathbb{F}_5$.

   (ג) מצא מספרים $q \neq 7$ ו־ $q' \neq 5$ כך ש־ $P(x)$ אי פריק מעל $\mathbb{F}_q$ אך פריק מעל $\mathbb{F}_{q'}$.

5. תהי G חבורה סופית ותהי $H \trianglelefteq G$ תת־חבורה נורמלית. יהי $f : G \to G/H$ האפימורפיזם המוגדר על ידי $f(g) = gH$ לכל $g \in G$. יהי $a \in G$ איבר כך ש־ $o(a)$ זר ל־ $|H|$. הוכח כי $o(a) = o(f(a))$.