תרגיל 1 – אלגברה מופשטת

1. קבעו עבור כל אחת מהמערכות הבאות אם היא חבורה למחצה , אם היא מונואיד ואם היא חבורה. הוכיחו.

1.1 קבוצת המספרים הזוגיים עם פעולת הכפל.

1.2 קבוצת המטריצות ההפיכות בגודל 3×3 מעל הממשיים ביחס לפעולת החיבור.

1.3 קבוצת המספרים הממשיים עם הפעולה $a*b=\frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)$

1.4 קבוצת המטריצות $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a,b\in R\right\}$ עם פעולת הכפל.

1.5 קבוצת הטבעיים עם הפעולה $m*n=\max\{m,n\}$.

1.6 קבוצת הממשיים עם הפעולה $a*b=a+b+2$.

2. יהי $M=\{1,a,b,c\}$ מונואיד בעל ארבעה איברים שבו 1 איבר יחידה ומתקיים $ab=c, bc=a, ca=b$.

2.1 הוכיחו כי $a^2=b^2=c^2$.

2.2 הוכיחו כי $a^2\neq a$

3. יהי M מונואיד ויהיו $a,b\in M$. הוכיחו את הטענות הבאות.

3.1 אם a הפיך אז קיים לו הופכי יחיד.

3.2 אם aba הפיך אז גם a,b הפיכים.

4. ענו על הסעיפים הבאים.

4.1 קבעו אם הקבוצה $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a,b\in R, a^2+b^2>0\right\}$ היא חבורה למחצה, מונואיד או חבורה, ביחס לכפל מטריצות.

4.2 תהי $G=\left\{\begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} : a,b,c\in R\right\}$. הוכיחו כי G חבורה ביחס לכפל מטריצות.

חבורה זו נקראת חבורת הייזנברג.

5. תהיינה $(G,\bullet),(H,*)$ חבורות. נגדיר פעולה $\cdot$ על המכפלה הקרטזית $G\times H$ כדלהלן: $(g_1,h_1)\cdot(g_2,h_2)=(g_1\bullet g_2,h_1*h_2)$. הוכיחו כי $G\times H$ היא חבורה תחת פעולה זו.

6. יהי $(M,\cdot)$ מונואיד, ויהי $a\in M$. נגדיר פעולה בינארית חדשה: $x*y=x\cdot a\cdot y$.

הוכיחו ש-$(M,*)$ הוא חבורה לְמֶחֱצָה.

מצאו תנאי הכרחי ומספיק לכך ש-$(M,*)$ הוא מונואיד.

בהצלחה! ☺