(1) תזכורת: אם f אנליטית בתחום פשוט קשר R, ו-γ עקומה סגורה ופשוטה ב-R ו-α נקודה בפנים של γ אז לכל $0 \le n$

$$f^{(n)}(\alpha) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}}\,dz$$

__שאלה:__ חשבו את האינטגרל $I = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^{zt}}{(z^2+1)^2}\,dz$

כאשר $0<t$ ו-C היא המעגל $|z|=3$

__פתרון:__ נשתמש בפירוק לשברים חלקיים

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z+i)(z-i)} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right)$$

$$\frac{1}{(z^2+1)^2} = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(z-i)^2} - \frac{2}{(z-i)(z+i)} + \frac{1}{(z+i)^2}\right)$$ לכן

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(z-i)^2} + \frac{1}{i}\left(\frac{1}{z+i} - \frac{1}{z-i}\right) + \frac{1}{(z+i)^2}\right)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^{zt}}{(z^2+1)^2}\,dz = -\frac{1}{8\pi i}\int_C \frac{e^{zt}}{(z-i)^2}\,dz$$ לכן:

$$-\frac{1}{8\pi}\int_C \frac{e^{zt}}{z-i}\,dz + \frac{1}{8\pi}\int_C \frac{e^{zt}}{z+i}\,dz$$

$$-\frac{1}{8\pi i}\int_C \frac{e^{zt}}{(z+i)^2}\,dz$$

$$= -\frac{1}{4}\left(e^{zt}\right)'_z\Big|_{z=i} - \frac{i}{4}\left(e^{zt}\right)\Big|_{z=i}$$

$$+\frac{i}{4}\left(e^{zt}\right)\Big|_{z=-i} - \frac{1}{4}\left(e^{zt}\right)'\Big|_{z=-i}$$

$$= -\frac{t}{4}e^{it} - \frac{i}{4}e^{it} + \frac{i}{4}e^{-it} - \frac{t}{4}e^{-it}$$

$$= -\frac{t}{4}e^{it} - \frac{t}{4}e^{-it} - \frac{i}{4}e^{it} + \frac{i}{4}e^{-it}$$

$$= -\frac{t}{2}\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right) - \frac{i^2}{2}\left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)$$

$$= -\frac{t}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t)$$

ב) צריך: חשבו את האינטגרל $\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\sin^4 z}{z^5}dz$

כאשר C הוא מעגל עם מרכז בראשית ורדיוס 1.

פתרון: לפי נוסחת קושי נקבל ש-

$$\frac{24}{2\pi i}\oint_C \frac{\sin^4 z}{z^5}dz = \left(\sin^4 z\right)^{(4)}\Big|_{z=0}$$

כדי לחשב את הנגזרת הרביעית של $\sin^4 z$

נעזר בנוסחאות טריגונומטריות

$$\sin^4 z = \sin^2 z\,\sin^2 z = \left(\frac{1-\cos(2z)}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos(2z) + \frac{1}{4}\cos^2(2z)$$

$$= \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos(2z) + \frac{1}{8}\cos(4z)$$

(3)

אם נגזור ביטוי זה ארבע פעמים נקבל

$$-8\cos(2z) + 32\cos(4z)$$

ואחרי שנציב $z=0$ נקבל 24

לכן

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{\sin^4 z}{z^5}\,dz = \frac{24}{24} = 1$$

שאלה: הוכיחו כי

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\Theta-\phi) + r^2}\,d\phi = 2\pi$$

כאשר $R > r > 0$ ו- $\Theta \in [0, 2\pi)$.

פתרון: נעשה החלפת משתנים $z = e^{i\phi}$ ואז

$dz = ie^{i\phi}d\phi$ ולכן $d\phi = \frac{dz}{iz}$ ולכן

$$I = \int_{|z|=1} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\left(\frac{e^{i(\Theta-\phi)} + e^{-i(\Theta-\phi)}}{2}\right) + r^2}\,\frac{dz}{iz}$$

$$= \int_{|z|=1} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - Rr\left(e^{-i\Theta}z + e^{i\Theta}z^{-1}\right) + r^2}\,\frac{dz}{iz}$$

$$= \frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{(R^2-r^2)\,dz}{-Rre^{-i\phi}z^2+(R^2+r^2)z-Rre^{i\phi}}$$

$$= \frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{(R^2-r^2)\,dz}{-Rre^{-i\phi}\left(z-\frac{re^{i\phi}}{R}\right)\left(z-\frac{R}{r}e^{i\phi}\right)}$$

$$= \frac{ie^{i\phi}}{Rr}\int_{|z|=1} \frac{(R^2-r^2)\,dz}{\left(z-\frac{re^{i\phi}}{R}\right)\left(z-\frac{R}{r}e^{i\phi}\right)}$$

ע"י שימוש בפירוק לשברים חלקיים נקבל

$$\frac{1}{\left(z-\frac{re^{i\phi}}{R}\right)\left(z-\frac{R}{r}e^{i\phi}\right)} = \frac{Rre^{-i\phi}}{r^2-R^2}\left(\frac{1}{z-\frac{re^{i\phi}}{R}}-\frac{1}{z-\frac{R}{r}e^{i\phi}}\right)$$

לכן האינטגרל שווה ל-

$$I = -i\int_{|z|=1} \frac{dz}{z-\frac{r}{R}e^{i\phi}} - \frac{dz}{z-\frac{R}{r}e^{i\phi}}$$

לפי משפט קושי, האינטגרל הראשון שווה ל- $2\pi i$

(כי $\frac{r}{R}<1$) והאינטגרל השני שווה ל- 0

(כי $\frac{R}{r}>1$) ולכן $I=-i(2\pi i)=2\pi$