מבוא לתורת החבורות תרגיל 6 תשע"ח.

עבור כל אחת מהטענות הבאות, קבע האם היא נכונה, ואם לא מצא דוגמא נגדית:

1. מחלקה שמאלית היא ת"ח.

   (א) עבור חבורה ציקלית כל ת"ח היא נורמלית.

   (ב) אם N נורמלית ב G אז $GN = NG$.

   (ג) אם עבור ת"ח $N \leq G$ מתקיים $GN = NG$ אז N נורמלית.

   (ד) אם ת"ח H היא אבלית אז היא נורמלית.

   (ה) אם ת"ח H היא נורמלית אז היא אבלית.

2. המרכז (center) של חבורה G היא הקבוצה

$$Z(G) = \{x \in G : \forall g \in G \ gx = xg\}$$

   (א) הוכיחו כי $Z(G)$ הוא ת"ח של G.

   (ב) הוכיחו כי $Z(G)$ הוא ת"ח נורמלית בG.

   (ג) הוכיחו כי אם $N \lhd G$ אזי $Z(N) = \{x \in N : \forall y \in N \, xy = yx\}$ היא תת־חבורה נורמלית של G.
   שימו לב: אתם יודעים שהמרכז של חבורה הוא תת־חבורה נורמלית ולכן ברור ש $Z(N) \lhd N$. אבל אנחנו שאלנו אם זה נורמלי בG!

3. תהי G חבורה ו$H \leq G$ תת־חבורה. נגדיר את הליבה של H בG להיות:

$$Core(H) = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$$

.

(א) הראו כי $Core(H) \subseteq H$.

(ב) הוכיחו כי לכל $g \in G$, gHg^{-1} היא ת"ח של G. הסיקו כי $Core(H)$ היא ת"ח של G.

(ג) הוכיחו כי $Core(H)$ נורמלית בG.

4. יהיו $H_1 \trianglelefteq G_1, H_2 \trianglelefteq G_2$. הוכיחו ש$H_1 \times H_2 \trianglelefteq G_1 \times G_2$.

5. יהיו $f_1 : G \to H, f_2 : H \to K$ הומומורפיזמים של חבורות. הוכיחו כי $f_1 \circ f_2 : G \to K$ הוא הומומורפיזמם.

6. קבעו האם ההעתקות הבאות הן הומומורפיזם/מונומורפיזם/אפימורפיזם/איזומורפיזם:

(א) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f(x) = x^2$.

(ב) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(x) = x^2$.

(ג) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$, $f(x) = (x \mod n, x \mod n)$.

(ד) $f : G \to G$ $f(g) = g^{-1}$ עבור חבורה כלשהי G.

7. הוכיחו שאם G חבורה נוצרת סופית ויש הומומורפיזם $f : G \to H$ אז $im(f)$ נוצרת סופית.

8. הפריכו או הביאו דוגמא לשאלות הבאות:

(א) קיים אפימורפיזם $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$. (רמז: העזרו בשאלה הקודמת)

(ב) קיים מונומורפיזם $f : S_4 \to S_5$.

(ג) קיים אפימורפיזם $f : \mathbb{Z}_{50} \to \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{10}$

9. יהי $f : G \to H$ הומומורפיזם, ונניח ש G חבורה אבלית. הוכיחו כי $Im(f)$ אבלית.