

אלגברה לינארית 2

תרגיל מספר 4

שאלה 1:

תהי M מטריצה מסדר $n \times n$ כך שכל מינור (מכל גודל) של M מתאפס. (דהיינו הדטרמיננטה של כל תת מטריצה מתאפסת).

- א. הוכיחו כי $\text{Rank}(M) = 1$.
- ב. מה תוכלו לאמר על M כזו שהיא משולשת עליונה?
- ג. הראו (רשמו בתורה מפורשת) כי M ניתנת להצגה בצורה:

$$M = \vec{u} \cdot \vec{v}^t = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} (v_1 \quad \cdots \quad v_n)$$

שאלה 2:

תהי $\{M_1, M_2, \dots, M_N\}$ משפחה של מטריצות ריבועיות מסדר $n \times n$

כך שלכל $1 \leq i \leq N$. $M_i = \vec{u}_i \cdot \vec{v}_i^t$ (כמו למעלה)

$$|U| = 132, \quad |V| = 21 \quad \text{נתון} \quad U = (\vec{u}_1 \cdots \vec{u}_N) \quad V = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vdots \\ \vec{v}_N \end{pmatrix} \quad \text{תהיינה}$$

חשבו את הדטרמיננטה הבאה $\left| \sum_{i=1}^N M_i \right| = |M_1 + \dots + M_N|$ (מצאו מספרית למה היא שווה).

שאלה 3:

פיתרו בעזרת כלל קרמר את מערכות המשוואות הבאות :

$$\begin{cases} 3y + 2x = z + 1 \\ 3x + 2z = 8 - 5y \\ 3z - 1 = x - 2y \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \end{cases}$$

שאלה 4:

יהיו $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$, $g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0$ פולינומים כך ש $m, n > 0$. נגדיר

$$\text{Res}(f, g) = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_0 & 0 & \cdots & \cdot & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & a_n & a_{n-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & \cdot & \cdot & b_0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdots & 0 \\ 0 & b_m & b_{m-1} & \cdot & \cdot & b_0 & 0 & \cdot & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdots & 0 & b_m & b_{m-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & b_0 \end{vmatrix}$$

הוכיחו כי $\text{Res}(f, g) = 0$ או"א $a_n = 0 = b_m$ או של $f(x)$ ו $g(x)$ יש גורם משותף (פולינום ממעלה חיובית המחלק את שניהם).