תורת הקבוצות — תרגיל בית 1

חיים שרגא רוזנר

כ"ז באדר, תשע"ה*

תקציר

סדר מלא, סדר טוב, יחס נורש ותכונות נורשות, $\in$־טרנזיטיביות, איחוד של קבוצה, חיתוך של קבוצה, סודר.

תזכורות

1. יחסים וסדרים

- יחס R על קבוצה A הוא:

  אנטי־רפלקסיבי אם לכל $a \in A$, מתקיים $(a,a) \notin R$.

  טרנזיטיבי אם לכל $a,b,c \in A$, מתקיים $(aRb \wedge bRc) \to aRc$.

  טריכוטומי אם לכל $a,b \in A$ מתקיים $aRb \vee bRa \vee a=b$.

  יחס סדר קווי (בקיצור: סדר) אם הוא אנטי־רפלקסיבי, טרנזיטיבי וטריכוטומי.

- יהי R סדר של הקבוצה A. נאמר שהאיבר $a \in A$ הוא **איבר ראשון** ב־A, אם לכל $b \in A$, מתקיים $a < b \vee a = b$.

- סדר קווי R על קבוצה A הוא **סדר טוב** עליה אם לכל תת־קבוצה לא ריקה $\varnothing \neq B \subseteq A$ יש איבר ראשון.

- יהי R יחס על קבוצה A, ותהי A' תת־קבוצה של A. נגדיר על A' את **היחס הנורש** מ־A על ידי $R' \coloneqq R \cap A' \times A'$. בדרך כלל לא נציין שאנו עוסקים ביחס הנורש, אלא נדבר על היחס R בהקשר לקבוצה A'. כל התכונות שמנינו לעיל הן **תכונות נורשות**, דהיינו אם R מקיים תכונה כלשהי מאלה, כיחס על A, אז R' מקיים את אותה התכונה על A'.

2. קבוצות

- קבוצה A היא **$\in$־טרנזיטיבית** אם לכל $a \in A$ ולכל $b \in a$ מתקיים $b \in A$.
- תהי A קבוצה. נסמן את **האיחוד** שלה על ידי

$$\bigcup A \coloneqq \{x \colon \exists y \in A,\, x \in y\}$$

קיצורים מקובלים: $\bigcup_{i \in I} A_i \coloneqq \bigcup \{A_i \colon i \in I\}$, $A \cup B \coloneqq \bigcup \{A,B\}$.

*להגשה עד יום חמישי ו' בניסן (26 במרץ) לתא מספר 45 בתאי המילגאים של המחלקה למתמטיקה.

- תהי A קבוצה לא ריקה. נסמן את **החיתוך** שלה על ידי

$$\bigcap A := \{x \colon \forall y \in A,\, x \in y\}$$

קיצורים מקובלים דומים לקיצורי האיחוד.

- קבוצה A היא **סודר** אם היחס $\in$ הוא יחס סדר טוב עליה ואם היא $\in$־טרנזיטיבית.
- 0 הוא מספר טבעי בקורס שלנו. הגדרות מדויקות למושגים כמו: אפס, מספר טבעי, קבוצה סופית, קבוצה אינסופית — מתוכננות להגיע במהלך הקורס, יש למה לחכות. אולי אפילו נגדיר מה היא קבוצה.

1 סדרים

1. תהי A קבוצה סדורה היטב, ונניח כי $f\colon A \to B$ היא פונקציה על. מצאו סדר טוב על B.
2. (השאלה בוטלה.)
3. נגדיר את הסדר המילוני[1] על קבוצת הסדרות האינסופיות של אפסים ואחדים

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} := \{(a_0, a_1, \dots) \colon \forall n,\, a_n \in \{0,1\}\}$$

בצורה הבאה: $(a_0, a_1, \dots) < (b_0, b_1, \dots)$ אם ורק אם: יש מספר טבעי n כך ש־$(a_0, \dots, a_{n-1}) = (b_0, \dots, b_{n-1})$, וכן $a_n < b_n$.

קל לראות שהסדר הזה הוא מלא. הוכיחו שסדר זה אינו טוב.

2 $\in$־טרנזיטיביות

1. תהי A קבוצה לא ריקה של קבוצות $\in$־טרנזיטיביות. הראו כי $\bigcup A$ ו־$\bigcap A$ גם הן $\in$־טרנזיטיביות.
2. (השאלה בוטלה.)
3. (השאלה נדחתה לתרגיל בית 2.)
4. (השאלה נדחתה לתרגיל בית 2.)
5. יהי α סודר. נסמן $S(\alpha) := \alpha \cup \{\alpha\}$. הראו כי $\in$ הוא סדר טוב על $S(\alpha)$. נזכיר כי בשיעור הראינו ש־$S(\alpha)$ היא קבוצה $\in$־טרנזיטיבית, ובהוכחה זו תשלימו את הטענה כי $S(\alpha)$ הוא סודר בפני עצמו.

ב ה צ ל ח ה!

[1] **הסדר המילוני** על שתי קבוצות סדורות A, B מוגדר בצורה הבאה: $(a_1, b_1) <_{\text{lex}} (a_2, b_2)$ אם מתקיים אחד מהשניים:

(א) $a_1 <_A a_2$, או

(ב) $a_1 = a_2$ וכן $b_1 <_B b_2$.

בהרצאה הראינו שאם A, B סדורות היטב, הרי שהסדר המילוני הוא טוב. אינדוקציה פשוטה מראה שהטענה נכונה לכל מכפלה **סופית** של קבוצות סדורות היטב. בתרגיל זה אנו מדגימים שניתן להכליל את הבניה של סדר מילוני גם למכפלה אינסופית סדורה היטב של קבוצות סדורות (במקרה שלנו: מכפלה "מאורך $\mathbb{N}$", שהיא קבוצה סדורה היטב), אך במכפלה אינסופית עלול להתקבל סדר מילוני שאיננו סדר טוב. זאת, על אף שהכפלנו רק קבוצות סדורות היטב. אם כן, ההכללה של הטענה מההרצאה טובה רק למכפלות מאורך סופי.