

תרגיל תכנות מספר 2 (עדכון 15.12)

בתרגיל זה נבנה אלגוריתם ליניארי!! למציאת את האיבר ה- j הכי קטן של מערך בגודל n , בעזרת האלגוריתם "חציון של חציון".

מומלץ להביט בקישור https://en.wikipedia.org/wiki/Median_of_medians#Algorithm
 $\text{select}(i, n, a_1, a_2, \dots, a_n) =$

קלט: אינדקס i קטן מ n . גודל מערך n ולאחריו האיברים במערך. (בקלט לא יהיו).
פלט: האיבר ה- i במערך

1. אם הקלט הוא מערך בגודל 1 אז הפלט יהיה המספר. אחרת:
2. נחלק את המערך לתתי-מערכים בגודל של 5 כך שיהיו $n/5$ קבוצות
3. מצאו חציון של כל קבוצה של 5 (בעזרת איזה אלגוריתמים שתבחרו - זה לא משנה כי אורך המערך לא תלוי בקלט אם יש תת-קבוצה אחת שהיא קטנה מחמש אז תבחרו את אחד מאיבריה הכי קרוב לחציון-אפשר גם לבחור אחרת כי זה לא משפיע על הסיבוכיות)
4. לקבוצה זו של חציונים (הפלט של שלב 2) בגודל $n/5$ מצאו את החציון באמצעות קריאה רקורסיבית לאלגוריתם זה. כלומר הקלט בשלב זה יהיה: אינדקס $\frac{n}{5} + 1$, גודל מערך $n/5$ ולאחריו אברי המערך. $\text{select}(\frac{n}{5} + 1, n/5, b_1, b_2, \dots, b_{n/5}) = p$
5. הפלט של שלב 3 נותן לנו מספר p גדול מלפחות 30% מהמספרים וקטן מלפחות 30% מהמספרים* (וראו דוגמה למטה). נרצה למצוא את האינדקס שבו מופיע מספר זה. נבצע זאת על ידי חלוקה שמזכירה את החלוקה ב quicksort: נעבור על אברי המערך ונראה כמה מהם קטנים מהציר (יש לאחסן אותם ואת המספרים הגדולים מהציר). אם $j - 1$ מהם קטנים מהציר אז האינדקס שלו הוא j . כתוצאה משלב 3 נקבל שהמיקום j של הציר הוא:

(א) $j = i$ ואז מצאנו את מבוקשנו ונפלוט את הציר.

(ב) $j < i$ ואז נפעיל שוב את האלגוריתם כאשר הפעם הקלט הוא: אינדקס $i - j$ מספר איברי מערך $n - j$ והמערך הוא כל המספרים הגדולים מהציר (כלומר המספרים המופיעים אחרי הציר) $\text{select}(i - j, n - j, c_1, c_2, \dots, c_{n-j})$

(ג) $j > i$ ואז נפעיל את האלגוריתם עבור קלט: אינדקס i מספר איברי מערך $j - 1$, והמערך הוא כל המספרים הקטנים מהציר. $\text{select}(i, j - 1, d_1, d_2, \dots, d_{j-1})$.

אינטואיציה: הציר נמצא באחוזון 70% - 30% של המערך ולכן בהכרח בשלב הבא של האלגוריתם נעבוד עם לפחות 30% פחות איברים. חישוב זמן ריצה רקורסיבי מתאים יראה תלות ליניארית.

בהצלחה

*לדוגמה: נניח שהמערך הוא בן 15 אברים. נפרק אותו ל 3 קבוצות בגודל 5: a_1, \dots, a_5
 b_1, \dots, b_5 c_1, \dots, c_5 . נניח שהחציונים של תתי הקבוצות הם: a_3, b_3, c_3 . נביט על החציון של קבוצה זו: b_3 . מאיזה מספרים הוא גדול:
הוא חציון של של הקבוצה b :

$$b_3 > b_2, b_1$$

הוא חציון של a_3, b_3, c_3 :

$$b_3 > a_3$$

אבל מתקיים $a_3 > a_1, a_2$ כי הוא חציון של קבוצה a
יוצא ש b_3 גדול מ-5 מספרים כלומר שליש מהמערך המקורי.