תרגול 6

<u>תנאי הכרחי להתכנסות טורים</u>

<u>משפט</u>

אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אז $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

<u>הערה</u>

ההפך לא בהכרח נכון ז"א אם $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ אז לא בהכרח שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

ראינו בתרגול הקודם שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ מתבדר, אבל $\lim_{n\to\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = 0$.

<u>דוגמא</u>

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\sin\frac{1}{n}$ מתבדר מכיוון ש $\lim_{n\to\infty} n\cdot\sin\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0$.

<u>תרגיל</u>

האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{1}{n^2}$ מתכנס?

<u>פתרון</u>

$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{1}{n^2} = 1$ ולכן הטור מתבדר.

<u>תרגיל</u>

בדוק התכנסות או התבדרות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}\cdot 4^n$.

<u>פתרון</u>

נשים לב ש $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4n^2+8n+4}{4n^2+6n+2} > 1$ ולכן הסדרה מונוטונית עולה, בנוסף $a_1 = 2$ ולכן $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ והטור מתבדר.

<u>מבחני השוואה לטורים חיוביים</u>

כדי להשתמש במבחני השוואה יש להשתמש בטורים שאנו כבר יודעים האם הם מתכנסים או מתבדרים.
נזכיר כאן שני מקרים חשובים:

1. יהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה הנדסית שמנתה $q \neq 0$ כך ש $-1 < q < 1$ אז הטור האינסופי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס ואם $|q| \geq 1$ אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.
2. יהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה כך ש $a_n = \frac{1}{n^{\alpha}}$ אז אם $\alpha > 1$ אז הטור האינסופי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס ואם $\alpha \leq 1$ אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

<u>הגדרה</u>

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ נקרא טור חיובי אם קיים n_0 טבעי כך שלכל $n > n_0$ $a_n > 0$.

<u>מבחן השוואה ראשון</u>

יהיו נתונים שני טורים חיוביים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

אם קיים n_0 טבעי כך שלכל $n > n_0$ מתקיים $a_n \le b_n$ אזי:

א. מהתכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ נובע התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

ב. מהתבדרות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ נובע התבדרות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

<u>דוגמא</u>

האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2^n}$ מתכנס או מתבדר? נתבונן בטור ההנדסי $b_n = \frac{1}{2^n}$ מכיוון ש $q = \frac{1}{2} < 1$ נקבל שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס, בנוסף $0 < \frac{1}{1+2^n} \le \frac{1}{2^n}$ לכל n טבעי, ולכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2^n}$ מתכנס.

<u>תרגיל</u>

האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{2\pi}{n}}{n^4}$ מתכנס או מתבדר?

<u>פתרון</u>

הטור חיובי עבור $n \ge 5$ ומתקיים $\frac{\cos\frac{2\pi}{n}}{n^4} \le \frac{1}{n^4}$ הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ מתכנס ולכן הטור המבוקש מתכנס.

<u>מבחן השוואה שני</u>

יהיו נתונים שני טורים חיוביים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ונניח שהגבול $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ קיים. ($b_n \ne 0$ לכל n טבעי)

אזי:

א. אם $0 < L < \infty$. שני הטורים מתכנסים או מתבדרים יחד.

ב. אם $L = 0$ אז מהתכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ נובע התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

ג. אם $L = \infty$ אז מהתבדרות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ נובע התבדרות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

<u>דוגמא</u>

נבדוק האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} 5^n \tan\frac{\pi}{6^n}$ מתכנס. נשים לב שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n$ מתכנס מכיוון ש a_n סדרה הנדסית עם מנה השווה ל $\frac{5}{6}$.

נחשב את הגבול $\pi = \lim_{n\to\infty}\frac{\tan\frac{\pi}{6^n}}{\frac{1}{6^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{5^n\tan\frac{\pi}{6^n}}{\left(\frac{5}{6}\right)^n}$, ולכן הטור מתכנס.

<u>משפט</u>

אם קיימים L, M ממשיים ו n_0 טבעי כך שלכל $n > n_0$ מתקיים $0 < L < \frac{a_n}{b_n} < M$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם ורק אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס.

<u>תרגיל</u>

בדוק התכנסות או התבדרות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ כאשר $a_n = \dfrac{n^2\sin\left(\frac{\pi}{3}+(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}\right)}{n^3+1}$.

<u>פתרון</u>

נסמן $b_n = \frac{1}{n}$ ואז $\frac{a_n}{b_n} = \dfrac{n^3\sin\left(\frac{\pi}{3}+(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}\right)}{n^3+1} = \frac{n^3}{n^3+1}\sin\left(\frac{\pi}{3}+(-1)^n\frac{\pi}{6}\right)$.

נשים לב ש

$$1 = \frac{n^3+1}{n^3+1} \ge \frac{n^3}{n^3+1} \ge \frac{n^3}{n^3+1}\sin\left(\frac{\pi}{3}+(-1)^n\frac{\pi}{6}\right) = \frac{n^3}{n^3+1}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \ge \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{4} > 0.$$

מכיוון שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתבדר נקבל שגם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

<u>מבחן העיבוי</u>

אם האיברים של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ הם חיובים ויורדים באופן מונוטוני, אזי הטור מתכנס או מתבדר יחד עם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.

<u>תרגיל</u>

בדוק התכנסות או התבדרות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^{\ln n}}$.

<u>פתרון</u>

איברי הטור הנ"ל חיוביים ויורדים מונוטונית ולכן ניתן להשתמש במבחן העיבוי.

$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n\frac{1}{2^n\cdot 2^{\ln 2^n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\ln 2^n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n\ln 2}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{\ln 2}}\right)^n$ קיבלנו טור גיאומטרי מתכנס ולכן גם הטור הנתון מתכנס.