תרגיל 11

1. נניח ש־(X,τ) מרחב טופולוגי ו־$A,B\subseteq X$ תת קבוצות קומפקטיות. האם $A\cap B$ קומפקטית?
<u>פתרון</u>

זה לאו דווקא נכון אם X אינו האוסדורפי. לדוגמה, נסמן

$$O_n:=\{-n,\ldots,n\}\subseteq\mathbb{Z}$$

נסתכל על $X:=\mathbb{Z}\cup\{-\infty,\infty\}$ עם הטופולוגיה τ שמוגדרת ע"י

$$\tau:=\{O_n\mid n\in\mathbb{N}\}\cup\Big\{\emptyset,\mathbb{Z},\mathbb{Z}\cup\{\infty\},\mathbb{Z}\cup\{-\infty\}\Big\}$$

קל לוודא שזו אכן טופולוגיה. בנוסף, $\mathbb{Z}\cup\{-\infty\}$ וגם $\mathbb{Z}\cup\{\infty\}$ הן קומפקטיות (בעצם $\mathbb{Z}$ כסדרה מתכנסת ל־$-\infty$ ו־∞ בו זמנית כי הגבול לא יחיד כשאין האוסדורפיות).

מנגד, החיתוך שלהן הוא $\mathbb{Z}$ שלא קומפקטי כי $\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ הוא כיסוי פתוח בלי תת כיסוי סופי.

אם (X,τ) האוסדורפי אז כל תת קבוצה קומפקטית היא סגורה. בפרט, $A\cap B\subseteq A$ תהיה תת קבוצה סגורה בקבוצה הקומפקטית A. לפי טענה מההרצאה, $A\cap B$ קומפקטית במקרה כזה.

2. הוכיחו או הפריכו: (X,τ_{cof}) קומפקטי.
<u>פתרון:</u>

הוכחה. יהי $\{O_i\}_{i\in I}$ כיסוי פתוח של X. נניח בה"כ ש־X לא ריקה ולכן הכיסוי לא ריק. נבחר $i_0\in I$. לפי הגדרה, $|O_{i_0}^c|<\infty$. לכל $x\in O_{i_0}^c$ נמצא $i_x\in I$ כך ש־$x\in O_{i_x}$. נסתכל על הקבוצה

$$F:=\{i_x\mid x\in O_{i_0}^c\}\cup\{i_0\}\subseteq I$$

זו כמובן קבוצה סופית ובנוסף $\{O_i\}_{i\in F}$ תת כיסוי של X. קל לראות את זה משום שאם $x\in X$ וגם $x\notin O_{i_0}$ אז $x\in O_{i_x}$ לפי הבניה. מצאנו תת כיסוי סופי, כרצוי.

3. הוכיחו שמספיק לבדוק קומפקטיות לפי אברי בסיס. כלומר, אם (X,τ) מרחב טופולוגי ו־$\gamma\subseteq\tau$ בסיס ל־τ. אז X קומפקטית אם ורק אם לכל כיסוי של X עם איברים של γ יש תת כיסוי סופי.
<u>פתרון:</u>

ראשית, ברור שאם X קומפקטית אז לכל כיסוי של X עם איברים של γ יש תת כיסוי סופי.

מנגד, נניח שלכל כיסוי של איברים של γ יש תת כיסוי סופי ונניח ש־$\{O_i\}_{i\in I}$ כיסוי כללי של X. מהתכונות של בסיס, לכל $i\in I$ קיימת $\gamma_i\subseteq\gamma$ כך ש־$O_i=\bigcup_{U\in\gamma_i}U$. נכתוב $\gamma_i=\{U_j^{(i)}\}_{j\in J_i}$ עבור סט אינדקסים כלשהו J_i. נשים לב ש־$\{U_j^{(i)}\}_{i\in I,j\in J_i}$ הוא כיסוי של X באברי בסיס ולכן קיים לו תת כיסוי סופי. כלומר, קיימת $F\subseteq I$ סופית ו־$E_j\subseteq J_i$ סופית לכל $i\in F$ כך ש־$\{U_j^{(i)}\}_{i\in F,j\in E_j}$ כיסוי סופי של X. כלומר

$$\bigcup_{i\in F}\bigcup_{j\in E_j}U_j^{(i)}=X$$

אנחנו טוענים ש־$\{O_i\}_{i\in F}$ תת כיסוי סופי של X. ואכן

$$\bigcup_{i\in F}O_i=\bigcup_{i\in F}\bigcup_{j\in J_i}U_j^{(i)}\supseteq\bigcup_{i\in F}\bigcup_{j\in E_j}U_j^{(i)}=X$$

4. מתי הטופולוגיה הקו־מנייתית היא קומפקטית?
<u>פתרון:</u>

רק כשהיא סופית.

ברור שכשהיא סופית היא קומפקטית. בשאר המקרים, יש לה תת קבוצה בת מניה $A=\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. לפי הגדרת הטופולוגיה, כל קבוצה בת מניה היא סגורה. לכן

$$A_m:=\{x_n\}_{m\leq n\in\mathbb{N}}$$

היא תת סדרה יורדת של קבוצות סגורות. קל לראות ש־$\{A_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ מקיימת FIP אבל לא IP.

5. הראו ש־$([0,1],\tau_s)$ כלומר הקטע הסגור עם טופולוגיית סורגנפריי אינו קומפקטי.
<u>פתרון:</u>

נסתכל על הקבוצה $A_n:=[1-\frac{1}{n},1)$. ראינו שהקבוצה הזו סגוחה בטופולוגיה. בנוסף, קל לראות ש־$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ מקיימת FIP. מנגד, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n=\emptyset$ ולכן היא לא מקיימת FIP. כלומר, $([0,1],\tau_s)$ לא קומפקטית.

6. הראו ש־$O_n(\mathbb{R})$ ־ קבוצת המטריצות האורתוגונלית (כלומר אלה שמקיימות $AA^T=I$) היא קומפקטית.
<u>פתרון</u>

ראשית, $O_n(\mathbb{R})\subseteq\mathbb{R}^{n\times n}$ (וזה נכון גם מבחינת הטופולוגיה). לכן, כדי להראות קומפקטיות אפשר להשתמש במשפט היינה בורל. קודם נראה שזו אכן קבוצה סגורה. לפי ההגדרה של כפל מטריצות, $A\in Mat_n(\mathbb{R})$ אורתוגונלית אם ורק אם לכל $1\leq i\leq n$ מתקיים

$$\sum_{j=1}^{n}A_{i,j}^2=1$$

ולכל $i_1\neq i_2$ מתקיים

$$\sum_{j=1}^{n}A_{i_1,j}A_{i_2,j}=0$$

בשני המקרים, אלה משוואות פולינומיאליות במקדמים של A. פולינומים הם רציפים ולכן אוסף הפתרונות שלהם תמיד סגור.

בנוסף, לפי המשוואה הראשונה קל לראות שלכל $1 \leq i, j \leq n$ מתקיים

$$|A_{i,j}| = \sqrt{A_{i,j}^2} \leq \sqrt{\sum_{j_0=1}^{n} A_{i,j_0}^2} = 1$$

ולכן $O_n(\mathbb{R})$ חסומה.

7. נניח ש־(X, τ) מרחב קומפקטי מטריזבילי. נסמן ב־$clop(X)$ את אוסף הקבוצות הסגוחות. הראו ש־$clop(X)$ בת מניה.
<u>פתרון</u>

ראינו כבר שכל מרחב קומפקטי מטרי הוא B_2. לכן, קיים בסיס בן מניה γ. לפי הגדרת בסיס, לכל $O \in clop(X)$ ולכל $x \in O$ קיים $x \in U_x \in \gamma$ כך ש־$U_x \subseteq O$. מכאן ש־

$$O = \bigcup_{x \in O} U_x$$

אבל O סגורה ב־X שהוא קומפקטי ולכן הוא גם קומפקטית. מכאן שקיים ל־$\{U_x\}_{x \in O}$ תת כיסוי סופי. במילים אחרות, לכל $O \in clop(X)$ קיים ייצוג כאיחוד סופי של קבוצות מ־γ. יש רק כמות בת מניה של תת קבוצות סופיות של γ (כי הוא בן מניה) ולכן $clop(X)$ גם צריכה להיות בת מניה.

8. יהי $(V, \|\cdot\|)$ מרחב נורמי. הוכיחו שאם $A, B \subseteq V$ הן תת קבוצות קומפקטיות אז גם

$$A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

קומפקטית.
<u>בונוס:</u> אותו תרגיל נכון גם עבור כל חבורה טופולוגית במקום V.
<u>פתרון</u>

נסתכל על הפונקציה $M : A \times B \to V$ שמוגדרת ע"י $M(a, b) := a + b$. ידוע שזו פונקציה רציפה. לפי משפט מההרצאה, מכפלה של מרחבים קומפקטיים היא קומפקטית ולכן $A \times B$ היא קומפקטית. בנוסף, תמונה רציפה של מרחב קומפקטי היא קומפקטית ולכן $M(A \times B)$ היא קומפקטית. קל לוודא ש־$M(A \times B) = A + B$.

9. נניח ש־$(X, \tau), (Y, \sigma)$ מרחבים טופולוגיים, $A \subseteq X, B \subseteq Y$ תת קבוצות קומפקטיות. אז לכל סביבה פתוחה $A \times B \subseteq O$ קיימות סביבות פתוחות $A \subseteq U, B \subseteq V$ כך ש־

$$A \times B \subseteq U \times V \subseteq O$$

<u>פתרון</u>

לכל $(a, b) \in A \times B$ מתקיים ש־O סביבה של (a, b). לפי הגדרת טופולוגיית המכפלה, קיימות סביבות $a \in U_{a,b} \in \tau, b \in V_{a,b} \in \sigma$ כך ש־$(a, b) \in U_{a,b} \times V_{a,b} \subseteq O$. לכל $b \in B$ מתקיים ש־$\{U_{a,b}\}_{a \in A}$ כיסוי של A. מכיוון ש־A קומפקטית, קיים תת כיסוי סופי $F_b \subseteq A$. נגדיר

$$V_b := \bigcap_{a \in F_b} V_{a,b}, \; U_b := \bigcup_{a \in F_b} U_{a,b}$$

בגלל שזה חיתוך סופי, V סביבה של $b \in B$. נסתכל על הכיסוי $\{V_b\}_{b\in B}$ של B. מכיוון שהיא קומפקטית קיים תת כיסוי סופי $E \in B$. נגדיר

$$U := \bigcap_{b\in E} U_b,\ V := \bigcup_{b\in E} V_b$$

אנחנו טוענים ש־$A \times B \subseteq U \times V \subseteq O$. אכן, לכל $b \in B$ מתקיים ש־$A \subseteq U_b$ ולכן $A \subseteq U$. בנוסף, $\{V_b\}_{b\in E}$ הוא כיסוי של B ולכן $B \subseteq V$. נראה עכשיו ש־$U \times V \subseteq O$. יהיו $(a', b') \in U \times V$. לפי הגדרה, קיים $b \in E$ כך ש־$b \in V_b$. עוד לפי ההגדרה עולה ש־$a' \in U_b$. נמשיך לפי ההגדרה ונמצא $a \in F_b$ כך ש־$a' \in U_{a,b}$ וגם $b' \in V_{a,b}$. כלומר $(a', b') \in U_{a,b} \times V_{a,b} \subseteq O$, כרצוי.

10. נסמן את קבוצת קנטור ב־$C \subseteq \mathbb{R}$.

(א) הראו ש־$C \simeq C^2 \simeq C^{\mathbb{N}} \simeq C^{\mathbb{Z}}$

(ב) הראו ש־C הומוגני

פתרון

ראשית, ראינו בהרצאה ש־$C \simeq \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. נראה עכשיו שאם A קבוצה בת מניה אז $C^A \simeq C$ מה שיוכיח את הטענה הראשונה. לפי משפט המכפלה של עוצמות (וגם לפי האלכסון הראשון של קנטור), $\mathbb{N} \times A$ עדיין בת מניה. תהי $\{(k_n, a_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ מניה של $\mathbb{N} \times A$. נגדיר פונקציה $\varphi : \{0,1\}^{\mathbb{N}\times A} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ע"י

$$\varphi\Big((x_{k,a})_{(k,a)\in\mathbb{N}\times A}\Big) := (x_{k_n,a_n})_{n\in\mathbb{N}}$$

קל לראות שזו פונקציה חח"ע ועל. כדי לוודא שהיא רציפה נבדוק ש־$\pi_n \circ \varphi$ רציפה עבור ההטלה $\pi_n : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}$. אכן, קל לראות ש־

$$\pi_n \circ \varphi = \pi_{k_n,a_n}$$

עבור $\pi_{k,a} : \{0,1\}^{\mathbb{N}\times A} \to \{0,1\}$ ההטלה על הרכיב ה־(k,a). מכיוון שההטלות תמיד רציפות, כך גם $\pi_n \circ \varphi$, ולכן גם φ רציפה. מכיוון שמדובר בהעתקה רציפה, חח"ע ועל בין מרחב קומפקטי למרחב האוסדורפי, זה הומיאומורפיזם.

נשאר רק להראות ש־$(X^A)^B \simeq X^{A\times B}$ כדי להראות ש־$\Big(\{0,1\}^{\mathbb{N}}\Big)^A \simeq \{0,1\}^{\mathbb{N}\times A}$. נשאיר את זה כתרגיל.

בתרגול הקודם ראינו ש־$C \simeq (\overline{\mathbb{Z}}, d_2)$, כלומר שקבוצת קנטור הומיאומורפית לשלמים ה־2־אדים. אנחנו יודעים שזו חבורה טופולוגית וכל חבורה טופולוגית היא הומוגנית אז גם C הומוגנית.

עוד דרך להוכחה היא להראות שמכפלה של מרחבים הומוגנים היא הומוגנית (ההוכחה די דומה להוכחת הרציפות שראינו קודם).

11. הוכיחו או הפריכו: ניתן לשכן טופולוגית את $[0,1]^{\mathbb{N}}$ במרחב הילברט l^2.

פתרון

נגדיר $\varphi : [0,1]^{\mathbb{N}} \to l^2$ ע"י

$$\varphi\Big((x_i)_{i\in\mathbb{N}}\Big) := \Big(\Big(\frac{1}{i+1}x_i\Big)_{i\in\mathbb{N}}\Big)$$

ראשית נראה שאכן $\varphi\Big((x_i)_{i\in\mathbb{N}}\Big)\in l^2$. מתקיים ש־

$$\|\varphi\Big((x_i)_{i\in\mathbb{N}}\Big)\|:=\|\Big(\Big(\frac{1}{i+1}x_i\Big)_{i\in\mathbb{N}}\Big)\|\le\|\Big(\Big(\frac{1}{i+1}\Big)_{i\in\mathbb{N}}\Big)\|=\sum_{i\in\mathbb{N}}\frac{1}{(i+1)^2}<\infty$$

נראה שהפונקציה רציפה. יהי $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}\in[0,1]^{\mathbb{N}}$ ו־$\varepsilon>0$. נמצא $N_0\in\mathbb{N}$ כך שהטור $\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{(i+1)^2}<\frac{1}{2}\varepsilon^2$. נסמן ב־$\pi_n:[0,1]^{\mathbb{N}}\to[0,1]$ את ההטלה על הכופל ה־n־י. נגדיר

$$U:=\bigcap_{i=1}^{N}\pi_i^{-1}\Big(B\Big(x_i,\frac{1}{\sqrt{2N}}\varepsilon\Big)\Big)$$

זו כמובן סביבה פתוחה של $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ בטופולוגיית המכפלה. בנוסף, לכל $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}\in U$ מתקיים ש־

$$\|\varphi\Big((x_i)_{i\in\mathbb{N}}\Big)-\varphi\Big((y_i)_{i\in\mathbb{N}}\Big)\|=\|\frac{1}{i+1}(x_i-y_i)\|=\sqrt{\sum_{i\in\mathbb{N}}\frac{1}{(i+1)^2}(x_i-y_i)^2}=$$

$$\sqrt{\sum_{i=0}^{N-1}\frac{1}{(i+1)^2}(x_i-y_i)^2+\sum_{i=N}^{\infty}\frac{1}{(i+1)^2}(x_i-y_i)^2}\le$$

$$\sqrt{\sum_{i=0}^{N-1}|x_i-y_i|^2+\sum_{i=N}^{\infty}\frac{1}{(i+1)^2}}\le$$

$$\sqrt{N\Big(\frac{\varepsilon^2}{2N}\Big)+\frac{1}{2}\varepsilon^2}=\varepsilon$$

לפי הגדרה ε רציפה. בנוסף, ברור שהיא חח"ע. נשים לב ש־$[0,1]^{\mathbb{N}}$ היא קומפקטית לפי משפט טיכונוף וידוע ש־l^2 האוסדורפית כמרחב מטריזבילי. לפי משפט על פונקציה רציפה וחח"ע ממרחב קומפקטי להאוסדורף, היא שיכון טופולוגי, כרצוי.

12. הראו שהתנאים הבאים שקולים עבור מרחב טופולוגי (X,τ) האוסדורפי:

(א) X קומפקטי, מטריזבילי וממימד אפס.

(ב) X הומיאומורפי לתת קבוצה סגורה של קבוצת קנטור

<u>פתרון</u>

ראשית נניח ש־X קומפקטי, מטריזבילי וממימד אפס. נשים לב שלכל קבוצה סגוחה $O\in clop(X)$, פונקציית המאפיין שלה $1_O:X\to\mathbb{R}$ שמוגדרת ע"י

$$1_O(x):=\begin{cases}1 & x\in O\\ 0 & x\notin O\end{cases}$$

רציפה (ראינו באחד התרגולים שפונקציית המאפיין תמיד רציפה מחוץ לשפה ולקבוצה סגוחה אין שפה). נסתכל על הפונקציה $\varphi:X\to\{0,1\}^{clop(X)}$ שמוגדרת ע"י

$$(\varphi(x))(O):=1_O(X)$$

זו בעצם פונקציה לתוך המכפלה וההיטלים שלה רציפים לפי מה שבדיוק ראינו. לפי משפט הטופולוגיה החלשה, φ רציפה. אפשר גם לרשום $\varphi = \prod_{O\in clop(x)} 1_O$ בנוסף, $\mathbb{R}^{clop(X)}$ הוא האוסדורפי כמכפלה של מרחבים האוסדורפים. אם נראה ש־φ היא חח"ע, אז לפי משפט מההרצאה זה יהיה שיכון טופולוגי (כהעתקה רציפה וחח"ע ממרחב קומפקטי למרחב האוסדורפי). בנוסף, ראינו בתרגיל 7 שבמצב כזה, יש לכל היותר כמות בת מניה של קבוצות סגוחות, ולכן $C \simeq \{0,1\}^{\mathbb{N}} \simeq \mathbb{R}^{clop(X)}$.
נשאר רק להראות ש־φ חח"ע.

יהיו $x \neq y \in X$. מכיוון ש־X מטריזבילי, הוא האוסדורפי ולכן בפרט קיימת סביבה $x \in U \subseteq \{y\}^c$. X הוא ממימד אפס ולכן לפי הגדרה קיימת סביבה סגוחה $x \in V \subseteq U$. אז

$$(\varphi(x))(V) = 1 \neq 0 = (\varphi(y))(V)$$

ולכן $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.

מנגד, נניח ש־X הומיאומורפי לתת קבוצה סגורה של קבוצת קנטור. מכיוון שקבוצת קנטור היא קומפקטית, כל תת קבוצה סגורה שלה קומפקטית גם היא. בנוסף, מטרזביליות ומימד אפס הן תכונות תורשתיות ולכן X מקיים אותן גם, כרצוי.