

פתרון תרגיל 12 בדידה להנדסה:

1. נניח בשלילה שקיימת פונקציה על:

$$f : A \rightarrow P(A)$$

נתבונן בקבוצה $B \in P(A)$ המוגדרת ע"י:

$$B = \{a \in A \mid a \notin f(a)\}$$

מכיוון שהפונקציה על, קיים $b \in A$ כך ש: $f(b) = B$.
כעת, אם $b \in B$ נקבל מהגדרת B ש- $b \notin f(b)$ ולכן $b \notin B$ וסתירה.
מאידך גיסא, אם $b \notin B$, מהגדרת B נקבל ש- $b \in f(b)$ ולכן $b \in B$ ושוב סתירה.
לכן, לא קיים $b \in A$ כך ש- $f(b) = B$ ולכן הפונקציה לא על.
כלומר, לא קיימת פונקציה על $f : A \rightarrow P(A)$ ובפרט לא קיימת כזו חח"ע ועל, ולכן:

$$|A| \neq |P(A)|$$

2. A היא אינסופית, ולכן מכילה תת קבוצה בת מניה C .
מכיוון ש- C בת מניה, אפשר לכתוב:

$$C = \{c_1, c_2, \dots\}$$

כעת, נתבונן בקבוצה $A \setminus \{c_1\}$. היא מוכלת ממש ב- A : $A \setminus \{c_1\} \subset A$.
נגדיר פונקציה $f : A \setminus \{c_1\} \rightarrow A$ ע"י:

$$f(a) = \begin{cases} a & a \notin C \\ c_{n-1} & a = c_n \end{cases}$$

קל לראות שהפונקציה חח"ע ועל, ולכן:

$$|A \setminus \{c_1\}| = |A|$$

ומצאנו קבוצה כנדרש.

3. מתקיים: $|A \setminus B| = |B \setminus A|$. לכן, קיימת פונקציה חח"ע ועל:

$$f : A \setminus B \rightarrow B \setminus A$$

כעת, נגדיר פונקציה $g : A \rightarrow B$ ע"י:

$$g(a) = \begin{cases} a & a \in A \cap B \\ f(a) & a \in A \setminus B \end{cases}$$

מכיוון ש- $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ וגם $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ וזהו איחוד זה, נקבל שזוהי אכן פונקציה.

מכיוון ש- f חח"ע ועל גם g חח"ע ועל (כי g "מורכבת" מ- f ומפונקציית הזהות, שתיהן חח"ע ועל), ולכן:

$$|A| = |B|$$

4. האם הקבוצות בנות מניה?

א. נניח בשלילה שהקבוצה בת מניה. אנו יודעים שגם \mathbb{Q} בת מניה, ושאחוד של שתי קבוצות בנות מניה הוא קבוצה בת מניה. כלומר:

$$\mathbb{R} = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q}$$

גם קבוצה בת מניה וסתירה. לכן $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ אינה בת מניה.

ב. אנו יודעים ש- $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$ ולכן קל לראות שגם: $|\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$.

אנו יודעים ש- $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$ בת מניה ולכן גם $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ בת מניה.

ג. נגדיר פונקציה $f : B_n \rightarrow \mathbb{N}$ ע"י:

$$f(n^k) = k$$

קל לראות שזו פונקציה חח"ע ועל ולכן:

$$|B_n| = |\mathbb{N}|$$

ולכן B_n בת מניה.

ד. בדיוק כמו סעיף ג'; מה שמשנה זה ה- k , לא ה- n .

ה. הקבוצה שלנו היא הקבוצה:

$$\left[\frac{1}{2}, 1\right)$$

ואנו יודעים ש:

$$|[\frac{1}{2}, 1)| = \mathbb{R}$$

ולכן הקבוצה אינה בת מניה.

5. א. הפרכה:

נבחר $A = B = \mathbb{N}$. נתבונן בפונקציה $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ המוגדרת ע"י: $f(n) = n + 1$. זו פונקציה חח"ע, ואכן $|A| = |B|$, אך הפונקציה לא על על \mathbb{N} (ל-1 אין מקור).

ב. הוכחה:

נניח ש- f חח"ע. לכן: $|f(A)| = |A| = n$.

כעת, $|B| = n$ וגם $f(A) \subseteq B$, ומכיוון ש- $|f(A)| = n$ נקבל $f(A) = B$, ולכן הפונקציה על.