מבחן בדידה קיץ תשפא

י"ג תשרי תשפ"ב, 19.9.2021

מרצים: עדי בן צבי, תמר בר־און, אריאל ויצמן, אלעד עטייא, ארז שיינר.
מתרגלים: אחיה בר־און, תמר בר־און, גיא ברגר, עוזי חרוש, עידו פלדמן, נעם פרץ, גלעד פורת קורן, הראל רוזנפלד.

הנחיות:

- ענו על כל השאלות.
- חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי־ מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!.

תשובות יש לכתוב על גבי הטופס בלבד. מחברת הטיוטה לא תבדק..

ניתן לענות משני צידי הדף..

בהצלחה!

1. (20 נק') תהיינה A,B,C קבוצות. הוכיחו או הפריכו כל אחד מהסעיפים הבאים:

(א) אם $P(A)\cup P(B)\subseteq C$ אז $A\cup B\in P(C)$.

(ב) אם $A\cap B=\emptyset$ אז $C\setminus A\neq C\setminus B$.

(ג) אם $A\cap B=\emptyset$ אז $A\setminus(C\setminus B)=A\setminus C$.

(ד) $P(B\setminus A)\subseteq P(B)\setminus P(A)$.

דף נוסף לשאלה מספר __

דף נוסף לשאלה מספר__

2. (21 נק') נגדיר יחס R על הקבוצה $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ כך: לכל $(a_1,b_1),(a_2,b_2)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ מתקיים:

$$(a_1,b_1)\,R\,(a_2,b_2) \iff [(a_1,b_1)=(a_2,b_2)\vee(b_1-b_2<a_1-a_2)]$$

(א) הוכיחו כי R יחס סדר חלקי על $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

(ב) האם לקבוצה $\{(1,2),(2,3)\}$ יש חסם עליון ביחס R? אם כן, מצאו אותו; אחרת, הוכיחו שלא קיים.

(ג) האם לקבוצה $\{(1,2),(2,3)\}$ יש חסם תחתון ביחס R? אם כן, מצאו אותו; אחרת, הוכיחו שלא קיים.

דף נוסף לשאלה מספר __

דף נוסף לשאלה מספר__

3. (24 נק') הגדרה: יחס R על $\mathbb{N}$ נקרא <u>מגדיל</u> אם לכל $(m,n) \in R$ מתקיים: $m \leq n$.
יהי R יחס על $\mathbb{N}$. הוכיחו או הפריכו כל אחד מהסעיפים הבאים:

(א) אם R יחס מגדיל אז R טרנזיטיבי.

(ב) אם R יחס מגדיל אז R אנטי סימטרי.

(ג) אם R יחס מגדיל אז קיים יחס S על $\mathbb{N}$ כך ש: $R \subseteq S$ וגם S יחס סדר חלקי.

(ד) אם R יחס מגדיל וגם יחס שקילות אז $R = I$ (כאשר $I = \{(n,n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ הינו יחס הזהות).

דף נוסף לשאלה מספר __

דף נוסף לשאלה מספר__

4. (21 נק') נסמן $X = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ את קבוצת כל הפונקציות מ $\mathbb{R}$ ל $\mathbb{R}$. נגדיר יחס $\sim$ על X כך: לכל $f, g \in X$ מתקיים: $f \sim g$ אם ורק אם קיימות $h_1, h_2 \in X$ הפיכות כך ש $f \circ h_1 = g \circ h_2$.

(א) הוכיחו: $\sim$ יחס שקילות על X.

(ב) עבור פונקצית הזהות $I \in X$, קבעו והוכיחו אם $[I]_\sim$ סופית, מעוצמה $\aleph_0$, מעוצמה $\aleph$, מעוצמה $2^\aleph$ או אחרת.

(ג) תהא $f \in X$ המקיימת שלכל $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ מתקיים $f(b_1) = f(b_2)$. קבעו והוכיחו אם $[f]_\sim$ סופית, מעוצמה $\aleph_0$, מעוצמה $\aleph$, מעוצמה $2^\aleph$ או אחרת.

דף נוסף לשאלה מספר __

דף נוסף לשאלה מספר__

5. הגדרה: קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}$ תקרא <u>מטוקטקת</u> אם: לכל $x_1 < x_2 \in A$ קיים $x_3 \in \mathbb{R} \setminus A$ כך ש־ $x_1 < x_3 < x_2$.

(א) תהא $A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה מטוקטקת, ויהיו $x_1 < x_2 \in A$. הוכיחו שקיימים <u>אינסוף</u> ערכים שונים $x \in \mathbb{R} \setminus A$ כך ש־ $x_1 < x < x_2$.

(ב) הוכיחו שלא קיימת קבוצה $S \subseteq \mathbb{R}$ כך ש: S מטוקטקת וגם אינה מוכלת באף קבוצה מטוקטקת אחרת.

(ג) הוכיחו שקיימת שרשרת $M \subseteq P(\mathbb{R})$ כך שלכל $A \in M$ מתקיים ש־ A מטוקטקת, אך האיחוד $U = \bigcup_{A \in M} A$ <u>אינה</u> קבוצה מטוקטקת.

דף נוסף לשאלה מספר __

דף נוסף לשאלה מספר__