ק.ב.ע

X ,d מרחב מטרי

הגדרה

הנקודה $x \in X$ נקראת נקודת גבול(או נק' הצטברות) של קבוצה $E \subset X$(limit point) אם **כל** כדור $B(x,r)$ מכיל נקודה של E השונה מx.

דוגמה

$X = \mathbb{R}$, $E = \left\{\frac{1}{n}\right\}$, 0 נק' גבול של E

טענה

אם $x \in X$ נק' גבול של E אזי כל כדור $B(x,r)$מכיל אין סוף נקודות של E.

הוכחת הטענה בדרך השלילה

נניח שקיים כדור $B(x,r)$ שמכיל מס' סופי בלבד של נק' של E. נאמר $x_1, ...x_n \in E$ השונות מx.

$$\delta = \min_{1 \le j \le n} d(x_j, x) > 0$$

$B(x,\delta)$ לא מכיל אף נק' של X השונה מx. סתירה לכך שx נק' גבול של E.

תוצאה

לקבוצה סופי E **אין** נקודות גבול.

משפט

קבוצה E במרחב מטרי היא סגורה אם ורק אם(אם"ם) היא מכילה את כל נקודות הגבול שלה.

הוכחה

א) נניח E סגורה. צל"ה E מכילה את כל נקודות הגבול שלה. נניח בדרך השלילה שקיימת נק' גבול x השייכת לE^c. x נקודה פנימית של E^c. לכן קיים כדור $B(x,r)$ המוכל בE^c, ולכן לא מכיל נקודות של E. ז"א x לא נקודת גבול של E.

ב) נניח שE מכילה את כל נקודות הגבול שלה. צל"ה E סגורה. נניח בדרך השלילה שE לא סגורה. ז"א E^c לא פתוחה. ז"א קיימת נקודה $x \in E^c$ לא פנימית לE^c. ז"א **כל** כדור $B(x,r)$ מכיל נקודות שאינן בE^c, דהיינו נקודות

של E שהן בהכרח שונות מx(כי $x \in E^c$) ז"א x נקודת גבול של E.(והיא בE^c).
סותר את ההנחה.

שפת קיצור

אם A, B תת־קבוצות של X

א) נאמר שA, B זרות אם $A \cap B = \emptyset$.

ב) נאמר שA, B "נפגשות" אם $A \cap B \neq \emptyset$.

"קשירות"

הגדרה

יהי X מרחב מטרי. קבוצה חלקית $E \subset X$ נקראת לא קשירה(disconnected) אם קיימות קבוצות **פתוחות זרות** A, B הפוגשות את E ו$E \subset A \cup B$.

קבוצה קשירה היא קבוצה לא לא־קשירה.

משפט

תהיינה $\{E_\alpha\}_{\alpha \in I}$ משפחת קבוצות קשירות כך ש$\emptyset \neq E_\alpha \bigcap\limits_{\alpha \in I} \doteqdot F$ אזי $E_\alpha \bigcup\limits_{\alpha \in I} \doteqdot E$ קב' קשירה.

הוכחה

נתחיל בהערה אם E קב' קשירה וA, B קבוצות פתוחות, זרות, לא ריקות כך ש$E \subseteq A \cup B$ אז או $E \subseteq A$ או $E \subseteq B$.

(אחרת: A, B פוגשות את E, ולכן E לא קשירה. סתירה)

נניח בדרך השלילה שE לא קשירה. לכן קיימות A, B פתוחות זרות הפוגשות את E ו$E \subset A \cup B$ ($E_\alpha \subset$ לכל α).

$$\begin{matrix} A \supseteq A \cap B \neq \emptyset \\ B \supseteq B \cap E \neq \emptyset \end{matrix} \Rightarrow A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$$

($\forall\alpha E_\alpha$ קשירה) לכן, לפי ההערה, $E_\alpha \subseteq A$ או $E_\alpha \subseteq B$.

יהי $\beta \in I$ כלשהו. נניח ש$E_\alpha \subseteq A$ לα מסוים.

$$F \subseteq E_\alpha \subseteq A$$

$$F \subseteq E_\beta$$

$$\emptyset \neq F \subseteq A \cap E_\beta$$

לכן $\beta \in I$ $\emptyset \neq F \subseteq A \cap E_\beta$ לכן E_β פוגש את A. ועל כן לא ייתכן $E_\beta \subseteq B$(נכון לכל β). ז"א $E_\beta \subseteq A$ לכל $\beta \in I$(כי $E_\beta \subset A \cup B$).

$$E \doteqdot \bigcup_{\beta \in I} E_p \subseteq A$$

כמו כן, אם $E_\alpha \subseteq B$ ל-α מסוים, אזי $E \subseteq B$(סימטריות)(ואז E לא פוגש את A).
קיבלנו שE לא פוגש את אחת מהקבוצות A, B, וזאת בסתירה לטענה.

תוצאה

תהי E תת־קבוצה של מ"מ X עם התכונה <u>**כל שתי נקודות של E מוכלות בתת־קבוצה קשירה של E**</u>. אזי E קשירה.

הוכחה

נקבע $a \in E$. $x \in E$ <u>כלשהו</u>. לפי הנתון, קיימת קב' קשירה $E_x \subseteq E$ כך ש$a, x \in E_x$.$E = \bigcup_{x \in E} E_x$. $a \in \bigcap_{x \in E}$ ולכן $\neq \emptyset$, לכן E קשירה לפי המשפט.

קבוצות קומפקטיות

הגדרה

יהי X מרחב מטרי(d: המטריקה שלו). $E \subseteq X$.

<u>כיסוי פתוח</u> של E הוא משפחה של קבוצות פתוחות $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ בX כך ש$E \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha$.

<u>תת כיסוי</u> של כיסוי נתון $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ היא משפחה חלקית של המשפחה הנ"ל, <u>שגם היא</u> כיסוי של E - $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I' \subset I}$, $E \subseteq \bigcup_{\alpha \in I'} V_\alpha$.

הגדרה

הקבוצה E נקראת <u>קומפקטית</u> אם <u>לכל</u> כיסוי פתוח של E יש תת כיסוי <u>סופי</u>.

דוגמה

אם E קב' <u>סופית</u>, אזי היא קומפקטית.

$$x_i \in \{x_1, ...x_n\} \doteqdot E \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha$$

V_αפתוחות. לכל <u>$1 \leq i \leq n$</u>, קיים V_iכך ש$x_i \in V_\alpha$.

$$E = \{x_1, ...x_n\} \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{\alpha_i}$$

תרגיל

איחוד של מס' סופי של קבוצות קומפקטיות הוא קב' קומפקטית.

$E_1,...E_n$ קב' קומפקטית $\Leftarrow \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$ קב' קומפקטית.