

## אלגברה לינארית 2 (88113) – בחינת סיום (מועד ב') פרופ' רון עדין

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).  
אין להשתמש בשום חומר עזר, כולל מחשבון.  
יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות, כל שאלה בעמוד נפרד. כל השאלות שוות משקל.  
ניתן לסמן עמודים כ"טיוטה".  
נא להסביר ולנמק בבירור את כל הפתרונות.

*בהצלחה!*

1. א. הגדירו: בסיס אורתונורמלי.  
ב. נסחו והוכיחו את המשפט לגבי תהליך גרם-שמידט.
2. תהינה  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  מטריצות ריבועיות הפיכות. הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות, עם נימוקים מלאים:  
א.  $\det(ABA^{-1}B^{-1}) = 1$   
ב.  $\det(AB^t - BA^t) = 0$   
ג.  $\det(I + AB) = \det(I + BA)$   
ד.  $\det(AB^t A^t B) > 0$
3. א. הגדירו:  $\text{adj}(A)$  (הצמוד הקלאסי, או המטריצה הנלווית, של מטריצה  $A$ ).  
ב. תהי  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  כך ש- $\text{adj}(A) \neq 0$ . הוכיחו:  $\text{rank}(A) \geq n - 1$ .  
ג. לכל  $n \geq 2$ , תנו דוגמא של מטריצה  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  כך ש- $\text{adj}(A) \neq 0$  וגם  $\text{rank}(A) = n - 1$ .
4. א. עבור כל  $a \in \mathbb{R}$  מצאו את כל הערכים העצמיים הממשיים של המטריצה  
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & a \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$
  
ב. עבור אילו ערכי  $a \in \mathbb{R}$ , המטריצה  $A$  הנ"ל היא לכסינה (ניתנת לליכסון) מעל הממשיים? נמקו.  
ג. עבור כל  $a \in \mathbb{R}$ , רשמו את צורת ז'ורדן של  $A$  מעל המרוכבים.
5. א. נגדיר, עבור  $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2$ ,  $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ :  
$$f(z, w) = \overline{z_1 w_1} + i \overline{z_1 w_2} + i \overline{z_2 w_1} + 2 \overline{z_2 w_2}$$
  
הוכיחו:  $f$  איננה מכפלה פנימית על  $\mathbb{C}^2$ .  
ב. נגדיר, עבור  $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ :  
$$g(x, y) = 2x_1 y_1 + 4x_1 y_2 + 4x_2 y_1 + 8x_2 y_2$$
  
האם  $g$  היא מכפלה פנימית על  $\mathbb{R}^2$ ? נמקו.