מבנים אלגבריים תרגול 2

16 במרץ 2021

1 תת חבורה

הגדרה: תהי G חבורה ותהי $H \subseteq G$ תת־קבוצה של G. נאמר שH תת חבורה אם היא מקיימת את כל תנאי חבורה. בפועל, כיון שהיא תת קבוצה של חבורה מה שצריך לבדוק זה:

1. איבר היחידה: $e_G \in H$.
2. סגירות: $\forall h_1, h_2 \in H : h_1 h_2 \in H$.
3. הופכי: $\forall h \in H : h^{-1} \in H$.

סימון: נסמן ת"ח ע"י $H \le G$.

תרגילים:

1. תהי G חבורה, $H \subseteq G$. הוכיחו: $H \le G$ אמ"ם מתקיימים שני התנאים הבאים:

   (א) $e_G \in H$.

   (ב) $\forall h_1, h_2 \in H : h_1 h_2^{-1} \in H$.

   פתרון: בכיוון הראשון, נניח H ת"ח. אז התנאי הראשון מתקיים כי הוא תנאי של ת"ח. נראה שהתנאי השני מתקיים: יהיו $h_1, h_2 \in H$ צ"ל $h_1 h_2^{-1} \in H$: מתנאי קיום הופכי של ת"ח נקבל $h_2^{-1} \in H$, ואז מתנאי סגירות נקבל $h_1 h_2^{-1} \in H$.
   בכיוון השני, נתון ש־H מקיימת את שני התנאים, וצ"ל שהיא ת"ח. התנאי הראשון של ת"ח כמובן מתקיים. נראה שלכל $h \in H$ יש הופכי ב־H: ניקח את $h_1 = e, h_2 = h$, אז התנאי השני אומר ש־ $h^{-1} = eh^{-1} \in H$. נראה סגירות: יהיו $h_1, h_2 \in H$. אנו יודעים כבר ש־ $h_2^{-1} \in H$, ואז מהעובדה ש־ $h_1, h_2^{-1} \in H$ ומהתנאי השני נקבל:

$$h_1 h_2 = h_1 \left(h_2^{-1}\right)^{-1} \in H$$

2. האם $\{0,2\} \subseteq \mathbb{Z}_4 = \{0,1,2,3\}$ (עם פעולת חיבור ואז לקיחת השארית בחלוקה ל־4) זו תת־חבורה?

פתרון: כיון שיש לנו רק איבר אחד מעבר ליחידה, יש לבדוק קיום הופכי וסגירות שלו עם עצמו:

$$2+2=4\equiv 0(\mod 4)$$

ולכן קיבלנו ש־2 הופכי של עצמו, ובפרט יש לנו סגירות לכן זו ת"ח.

3. האם $\{0,3\} \subseteq \mathbb{Z}_5$ היא ת"ח?

פתרון: לא. ההופכי של 3 הוא 2 שלא נמצא בקבוצה. גם אין סגירות: $3+3=6\equiv 1$ $(\text{mod } 5)$.

4. נתבונן ב־S_3, ונראה הצגה של התמורות ע"י מטריצות:

$$\left\{Id=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}, f=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}, g=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\right.$$

הרכבת פונקציות בהצגה זו:

$$f\circ g=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$$

הערה: ראיתם בהרצאה ש S_n לא חילופית עבור $n>2$.

(א) האם $H=\{Id,g\}$ היא ת"ח של S_3?

פתרון: נרכיב את g עם עצמה ונראה מה קורה:

$$g\circ g=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\notin H$$

ולכן H לא ת"ח.

(ב) האם $H=\{Id,f\}$ ת"ח?

פתרון: נרכיב את f עם עצמה ונראה מה קורה:

$$f\circ f=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\\1&2&3\end{pmatrix}=Id$$

ולכן יש הופכי (מקבלים ש־ f הופכית של עצמה) וסגירות וזו ת"ח.

5. נתבונן בתת קבוצה של S_4:

$$K=\left\{Id=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix},f=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix},g=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix},h=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}\right\}$$

האם K ת"ח של S_4?

פתרון: ראשית, נשים לב שכל איבר הוא ההופכי של עצמו:

$$f\circ f=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\\1&2&3&4\end{pmatrix}=Id$$

ניתן לראות שאותו דבר בדיוק קורה גם עם g,h.

לגבי סגירות, צריך לבדוק כאן הרבה (6) הרכבות. נבדוק בכיוון:

$$f\circ g=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\\4&3&2&1\end{pmatrix}=h$$

$$f\circ h=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\\3&4&1&2\end{pmatrix}=g$$

$$g\circ h=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\\2&1&4&3\end{pmatrix}=f$$

וכאן (ב־K) מתקיים שההרכבה חילופית, ולכן K בסה"כ ת"ח. קוראים לה תת־חבורת קליין.