בחינת סיום (מועד ג') בקורס
מבנים אלגבריים להנדסה (83218)

מרצה: ד"ר נתן קלר

משך הבחינה: שעתיים וחצי.
נא לענות על 4 מתוך 5 השאלות. בכל שאלה, סעיף א' שווה 15 נקודות וסעיף ב' שווה 10 נקודות.
חומר עזר מותר בשימוש: מחשבון בלבד.

בהצלחה!

שאלה 1

א. יהי $n \geq 4$. הוכיחו כי המרכז של החבורה A_n (התמורות הזוגיות על n איברים) מכיל את תמורת הזהות בלבד.

ב. תהי G חבורה עם p^n איברים, כאשר p ראשוני ו- n מספר טבעי. הוכיחו כי המרכז של G מכיל יותר מאיבר אחד.

שאלה 2

א. תהי G חבורה ויהי $x \in G$. נניח שמתקיים $x^k = e$. הוכיחו כי $o(x)|k$ (כלומר, k מתחלק בסדר של x).

ב. תהי G חבורה בת 5776 איברים, ותהיינה H, K תת-חבורות של G כך ש- $|H| = 19$ ו $|K| = 8$. הוכיחו כי $H \cap K$ מכילה את איבר היחידה בלבד.

שאלה 3

א. תהי G חבורה ותהיינה H, K תת-חבורות נורמליות שלה, כך ש- $H \cap K = \{e\}$. הוכיחו כי לכל $x \in H$ ולכל $y \in K$ מתקיים $x * y = y * x$.

ב. האם קיימת חבורה סופית קומוטטיבית שאינה ציקלית ואין לה תת-חבורה נורמלית חוץ מהחבורה עצמה ו- $\{e\}$?

ג. (סעיף בונוס קשה ששווה נקודה אחת:) כמו סעיף ב', אבל ללא ההנחה שהחבורה קומוטטיבית.

שאלה 4

א. יהיו a, n מספרים טבעיים זרים (כלומר, $\gcd(a,n) = 1$). הוכיחו כי לכל b טבעי קיים מספר שלם $0 \leq x < n$ אחד ויחיד כך שמתקיים $ax = b(mod\ n)$.

ב. יהי R חוג, ויהיו $a, b \in R$. נניח שקיימים מספרים טבעיים זרים m, n כך שמתקיים $a^n = b^n$ וגם $a^m = b^m$. הוכיחו כי $a = b$.

שאלה 5

א. נתבונן בשדה $F_{16} = Z_2[x]/< x^4 + x^3 + 1 >$. תהי $G = (F_{16} \backslash \{0\}, \cdot)$ החבורה הכפלית של השדה (כלומר, הפעולה של G היא כפל פולינומים מודולו $x^4 + x^3 + 1$). הוכיחו כי הפולינום x הוא יוצר של G.

ב. תנו דוגמה לשדה סופי שכמות האיברים שלו אינה מספר ראשוני, בו הפולינום x אינו יוצר את החבורה הכפלית.