בוחן בדידה

19.7.2017 , כ"ה תמוז תשע"ז

מתרגלים: עדי בן צבי, אחיה בר־און, תמר בר־און, אלעד עטייא
הנחיות:

- ענו על כל השאלות.
- משך הבוחן: שעה וחצי.
- ללא חומר עזר. גם לא מחשבון.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי־ מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.
- ניקוד מקסמאלי: 110 נקודות

.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!

בהצלחה!

1. פרדיקט P מעל השלמים ייקרא "נחמד" אם הפסוק $\exists a\in\mathbb{Z}:[P(a)\to P(a+1)]$ בעל ערך $TRUE$. הוכיחו או הפריכו: כל פרדיקט הוא נחמד.

פתרון: הוכחה: יהא P פרדיקט ונוכיח כי $\exists a\in\mathbb{Z}:[P(a)\to P(a+1)]$ בעל ערך $TRUE$. אכן:

(א) אם $P(1)$ בעל ערך אמת $FALSE$ נקבל כי $\exists a\in\mathbb{Z}:[P(a)\to P(a+1)]$ בעל ערך $TRUE$ ע"י לקיחת $a=1$

(ב) אם $P(2)$ בעל ערך אמת $FALSE$ נקבל כי $\exists a\in\mathbb{Z}:[P(a)\to P(a+1)]$ בעל ערך $TRUE$ ע"י לקיחת $a=2$

(ג) אם אף אחד מהשניים הקודמים מתקיים, דהיינו $P(1)$וגם $P(2)$ בעל ערך אמת $TRUE$ נקבל כי $\exists a\in\mathbb{Z}:[P(a)\to P(a+1)]$ בעל ערך $TRUE$ ע"י לקיחת $a=1$

2. לכל $1<n\in\mathbb{N}$ נגדיר $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}, F_0=0, F_1=1$. אלו נקראים מספרי פיבונאצי'. הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי לכל $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ מתקיים:

$$\sum_{i=0}^{n}(F_i)^2=F_nF_{n+1}$$

פתרון: באינדוקציה על n:

בסיס:

עבור $n=0$: מתקיים $\sum\limits_{i=0}^{0}(F_i)^2=F_0^2=0=0\cdot 1=F_0F_1$

עבור $n=1$: מתקיים $\sum\limits_{i=0}^{0}(F_i)^2=F_0^2=0=0\cdot 1=F_0F_1$

צעד:

נניח נכונות עד n ונוכיח עבור $n+1$: נשים לב כי נוכל להניח כי $n\geq 1$ ואז

$$\sum_{i=0}^{n+1}(F_i)^2=F_{n+1}+\sum_{i=0}^{n}(F_i)^2\overset{(1)}{=}F_{n+1}^2+F_nF_{n+1}=F_{n+1}(F_{n+1}+F_n)\overset{(2)}{=}F_{n+1}F_{n+2}$$

כאשר (1) נכון בגלל הנחת האינדוקציה ו (2) לפי הגדרת מספרי פיבונאצי.

3. תהיינה A,B,C קבוצות. הוכיחו או הפריכו:

(א) $A\Delta B\subseteq(A\Delta C)\cup(B\Delta C)$.

i. פתרון: הוכחה.

יהי $x\in A\Delta B$, צ"ל $x\in(A\Delta C)\cup(B\Delta C)$.

יש לנו שתי אופציות: $x\in A\wedge x\notin B$ או $x\notin A\wedge x\in B$.

אם $x\in A\wedge x\notin B$, נחלק למקרים: כאשר $x\in C$ וכאשר $x\notin C$.

אם $x\in C$, אנו מקבלים $x\in C\wedge x\notin B$ ולכן $x\in B\Delta C$.

אם $x\notin C$, אנו מקבלים $x\in A\wedge x\notin C$ ולכן $x\in A\Delta C$.

אם $x\notin A\wedge x\in B$, שוב נחלק למקרים: כאשר $x\in C$ וכאשר $x\notin C$.

אם $x\in C$ אנו מקבלים $x\notin A\wedge x\in C$ ולכן $x\in A\Delta C$.

אם $x\notin C$ אנו מקבלים $x\in B\wedge x\notin C$ ולכן $x\in B\Delta C$.

בכל אחד מארבעת המקרים אנו מקבלים שאכן $x\in(A\Delta C)\cup(B\Delta C)$.

(ב) $A\Delta B\supseteq(A\Delta C)\cup(B\Delta C)$.

i. פתרון: הפרכה.
נבחר למשל את הקבוצות: $A=\{1\},B=\{2\},C=\{3\}$.
מצד אחד, $A\Delta B=\{1,2\}$.
מצד שני, $(A\Delta C)\cup(B\Delta C)=\{1,3\}\cup\{2,3\}=\{1,2,3\}$, ולכן $A\Delta B\not\supseteq(A\Delta C)\cup(B\Delta C)$.

4.

(א) תהא A קבוצה, ו R יחס שקילות עליה. נגדיר יחס S על R(כן, כן, גם R היא קבוצה) כך: לכל $(a,b),(a',b')\in R$

$$(a,b)\,S\,(a',b')\iff aRa'\wedge bRb'$$

הוכיחו S יחס שקילות.
פתרון:

- רפלקסיביות:יהא $(a,b)\in R$ צ"ל כי $(a,b)\,S\,(a,b)$. אכן, כיוון ש R רפלקסיבי מתקיים כי $aRa\wedge bRb$ ולכן לפי הגדרת S נקבל $(a,b)\,S\,(a,b)$ כנדרש
- סימטריות: נניח $(a,b)\,S\,(a',b')$ עבור $(a,b),(a',b')\in R$ צ"ל $(a',b')\,S\,(a,b)$. מההנחה $(a,b)\,S\,(a',b')$ נובע כי $aRa'\wedge bRb'$. כיוון ש R סימטרי נקבל כי $a'Ra\wedge b'Rb$ ולכן לפי הגדרת S נקבל $(a',b')\,S\,(a,b)$.
- טרנזיטיביות: נניח $(a,b)\,S\,(a',b'),(a',b')\,S\,(a",b")$ (צ"ל $(a,b)\,S\,(a",b")$) אזי $[aRa'\wedge bRb']\wedge[a'Ra"\wedge b'Rb"]$. כיוון ש R טרנזיטיבי נקבל כי $aRa"\wedge bRb"$ ולכן $(a,b)\,S\,(a",b")$ כנדרש.

(ב) נגדיר יחס שקילות R על $\mathbb{Q}^{\times}=\mathbb{Q}\backslash\{0\}$ כך: לכל $x,y\in\mathbb{Q}^{\times}$

$$xRy\iff\exists z\in\mathbb{Q}^{\times}:xy=z^2$$

i. הוכיחו כי R טרנזיטיבי (אין צורך להוכיח רפלקסיביות וסימטריות)
פתרון: נניח כי $xRy\wedge yRz$ אזי קיימים $t,s\in\mathbb{Q}^{\times}$ כך ש $xy=t^2\wedge yz=s^2$ ולכן $xy^2z=t^2s^2$ ולכן $xz=\left(\frac{ts}{y}\right)^2$ כיוון ש $\frac{ts}{y}\in\mathbb{Q}^{\times}$ נקבל כי xRz כנדרש

ii. נגדיר יחס S על R כמו בסעיף הקודם. מצאו מפורשות את מחלקת השקילות של $\left[\left(1,\frac{1}{4}\right)\right]_S$ ותנו 2 איברים במחלקת שקילות זאת.
פתרון: נקבל לפי הגדרה כי

$$\left[\left(1,\frac{1}{4}\right)\right]_S=\left\{(a,b)\in R:\ 1Ra\wedge\frac{1}{4}Rb\right\}$$

כיוון ש R יחס שקילות אזי לכל b המקיים $1R\frac{1}{4}\wedge\frac{1}{4}Rb$ גם $1Rb$ ולכן

$$\left[\left(1,\frac{1}{4}\right)\right]_S=\left\{(a,b)\in R:\ 1Ra\wedge\frac{1}{4}Rb\right\}=\{(a,b)\in R:\ 1Ra\wedge1Rb\}$$

נשים לב כי $1Ra$ פירושו $\exists z\in\mathbb{Q}^{\times}:a=z^2$ ולכן

$$\left[\left(1,\frac{1}{4}\right)\right]_S=\left\{\left(z^2,t^2\right)\mid z,t\in\mathbb{Q}^{\times}\right\}$$

שני איברים לדוגמא הם $(4,16),(1,1)$

בהצלחה! ☺