התכנסות טורי פוריה

ג'רמי שיף - המחלקה למתמטיקה, אוניברסיטת בר-אילן

8.11.17

ברצוני להוכיח את המשפט הבא:

המשפט

אם הפונקציה $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ היא מחזורית עם מחזור 2π, והצמצום שלה לקטע $[-\pi, \pi]$ רציפה למקוטעין, מנורמלת וגזירה למקוטעין, אזי טור הפוריה שלה

$$FSf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

מתכנס, לכל x, ל- $f(x)$.

הסברנו את המונחים במשפט בשיעור האחרון. הסברנו גם שאם f איננה מחזורית או איננה מנורמלת ניתן ל"תקן" אותה לפונקציה מחזורית ומנורמלת, בלי לשנות את טור הפוריה. ואם כן, לפי המשפט, טור הפוריה מתכנס לפונקציה המתוקנת.

נתחיל עם למה חשובה:

הלמה של ריימן

מקדמי הפוריה $\{a_n, b_n\}$ של פונקציה רציפה למקוטעין שואפים ל-0 כאשר $n \to \infty$.

לחסוך קצת כתיבה אני אוכיח במקרה של פונקציה אי-זוגית ממשית f. ההוכחה במקרה הכללי דומה.

טור הפוריה של f הוא $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$.

נכתוב $S_N = \sum_{n=1}^{N} b_n \sin nx$ לסכום החלקי של N האיברים הראשונים.

הלמה של ריימן

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi}(f-S_N)^2\,dx &= \int_{-\pi}^{\pi} f^2\,dx - 2\int_{-\pi}^{\pi} f\,S_N\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} S_N^2\,dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f^2\,dx - 2\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\sum_{n=1}^{N} b_n \sin nx\right)\,dx \\
&\quad + \int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{N} b_n \sin nx\right)\left(\sum_{m=1}^{N} b_m \sin mx\right)\,dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f^2\,dx - 2\sum_{n=1}^{N}\pi b_n^2 + \sum_{n=1}^{N}\pi b_n^2 \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f^2\,dx - \sum_{n=1}^{N}\pi b_n^2
\end{aligned}$$

הלמה של ריימן

בחישוב האנטגרל השני השתמשתי בעובדה ש-

$$\int_{-\pi}^{\pi} f \sin nx \, dx = \pi b_n$$

בחישוב האנטרגל השלישי השתמשתי בעודבה ש-

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n \end{cases}$$

בכל אופן יצא ש-

$$\sum_{n=1}^{N} b_n^2 \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2\,dx$$

כלומר: הסדרה של סכומים $\sum_{n=1}^{N} b_n^2$, שהם הסכומים החלקיים של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ של איברים לא-שליליים, היא חסומה. ולכן $\lim_{n\to\infty} b_n^2 = 0$ ו-

- $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

הערה: יצא לנו מההוכחה עובדה נוספת שנקראת "אי שוויון בסל"

$$\frac{|a_0|^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|^2+|b_n|^2\right)\leq\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f|^2\,dx$$

(חזרתי כאן למקרה של פונקציה כללית - מרוכבת ולא בהכרח אי-זוגית.) לפונקציות רציפות למקוטעין דווקא מתקיים שיוויון - שיוויון פרסבל - נוכיח בהמשך אבל רק בתנאים יותר חלשים.

הוכחת המשפט

נסתכל על הסכומים החלקיים של טור הפוריה:

$$
\begin{aligned}
S_N &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos nx + b_n \sin nx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt + \sum_{n=1}^{N} \left(\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt\, dt \right) \cos nx \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt\, dt \right) \sin nx \right) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{N} \cos nt \cos nx + \sin nt \sin nx \right) \, dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{N} \cos n(x-t) \right) \, dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(x-t)\, dt
\end{aligned}
$$

הוכחת המשפט

כאשר

$$D_N(x) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos nx\right)$$

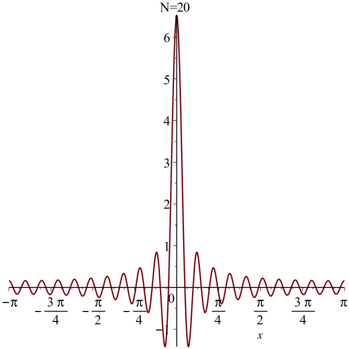
היא פונקציה הנקראת "גרעין דיריכלה". תכונות:

- מחזורית עם מחזור 2π, זוגית.
- $$\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x)\, dx = 1$$
- $$D_N(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\left(N+\frac{1}{2}\right) & x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots \\ \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)x}{2\pi \sin \frac{1}{2}x} & x \neq 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots \end{cases}$$

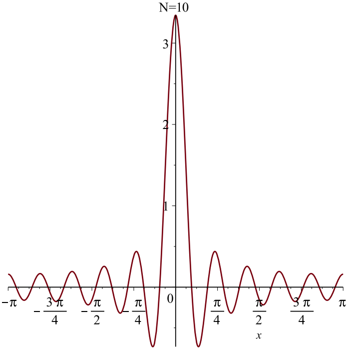
רמז הוכחה לאחרון: על ידי הנוסחה $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)$ אפשר לראות ש-
$D_N(x)$ הוא הטור ההנדסי $\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N} e^{inx}$

הוכחת המשפט

$D_{20}(x)$



$D_{10}(x)$



הוכחת המשפט

לפני שיצאנו ללמוד על גרעין דיריכלה היה לנו

$$
\begin{aligned}
S_N &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(x-t)\, dt \\
&= \int_{x+\pi}^{x-\pi} f(x-s) D_N(s)\, (-ds) \\
&= \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-s) D_N(s)\, ds \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(x-s) D_N(s)\, ds
\end{aligned}
$$

בין שורה ראשונה לשניה עשינו הצבה $s = x - t$.
בין שורה שלישית לרביעית השתמשנו במחזוריות של גם f וגם D_N להזיז את תחום האנטגרציה.

לפני השלב האחרון של ההוכחה נקח פסק זמן לקצת מוטיבציה.

הוכחת המשפט

נגדיר

$$\delta_N(x) = \begin{cases} N & |x| < \frac{1}{2N} \\ 0 & |x| \geq \frac{1}{2N} \end{cases}$$

אם f היא פונקציה רציפה אזי

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-s)\delta_N(s)\, ds = f(x)$$

האם אתה יכול להסביר למה?

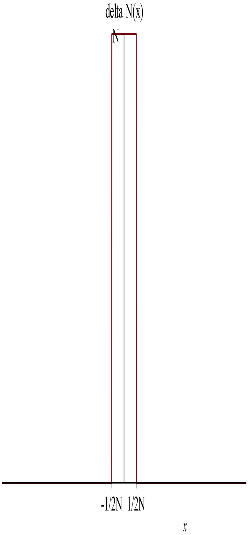
האם אתה יכול להוכיח?

אם f היא פונקציה רציפה למקוטעין אזי

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-s)\delta_N(s)\, ds = \frac{1}{2}\left(f(x+)+f(x-)\right)$$

האם אתה יכול להסביר למה?

האם אתה יכול להוכיח?



בהוכחה הגענו למסקנה

$$S_N = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-s) D_N(s)\, ds$$

ואנחנו רוצים להוכיח עכשיו ש-

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \frac{1}{2}\left(f(x+) + f(x-)\right)$$

כלומר - היות ו- f היא מנורמלת -

$$\lim_{N\to\infty} S_N = f(x)$$

הפונקציה D_N במידה מסויימת דומה ל- δ_N - גבוה בראשית, קרוב ל-0 חוץ מבסביבה קטנה של הראשית. אבל היא יותר מסובכת, וזה הסיבה שנצטרך לדרוש ש-f גזירה למקוטעין.

הוכחת המשפט

$$
\begin{aligned}
|S_N - f(x)| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x-s) D_N(s)\, ds - \frac{1}{2}\left(f(x+) + f(x-)\right) \right| \\
&= \left| \int_{-\pi}^{0} f(x-s) D_N(s)\, ds + \int_{0}^{\pi} f(x-s) D_N(s)\, ds \right. \\
&\quad \left. -f(x+) \int_{-\pi}^{0} D_N(s)\, ds - f(x-) \int_{0}^{\pi} D_N(s)\, ds \right| \\
&= \left| \int_{-\pi}^{0} (f(x-s) - f(x+)) D_N(s)\, ds \right. \\
&\quad \left. + \int_{0}^{\pi} (f(x-s) - f(x-)) D_N(s)\, ds \right| \\
&\le \left| \int_{0}^{\pi} (f(x+s) - f(x+)) D_N(s)\, ds \right| \\
&\quad + \left| \int_{0}^{\pi} (f(x-s) - f(x-)) D_N(s)\, ds \right|
\end{aligned}
$$

נראה בנפרד שכל אחד מהאנטגרלים שואף ל-0 כאשר N שואף ל- ∞.

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi (f(x+s)-f(x+))D_N(s)\,ds \\
=\;& \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi (f(x+s)-f(x+))\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)s}{\sin\frac{1}{2}s}\,ds \\
=\;& \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi (f(x+s)-f(x+))\left(\frac{\sin Ns\cos\frac{1}{2}s}{\sin\frac{1}{2}s}+\cos Ns\right)\,ds \\
=\;& \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{(f(x+s)-f(x+))\cos\frac{1}{2}s}{\sin\frac{1}{2}s}\sin Ns\,ds \\
&+\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi (f(x+s)-f(x+))\cos Ns\,ds
\end{aligned}$$

- האנטגרל השני בביטוי זה הוא מקדם פוריה של (ההכללה הזוגית של) הפונקציה $f(x+s)-f(x+)$. זו פונקציה רציפה למקוטעין, ולכן, לפי הלמה של רימן, מקדם הפוריה שואף ל-0 בגבול $N\to\infty$.
- האנטגרל הראשון הוא מקדם פוריה של (ההכללה האי-זוגית של) הפונקציה $\frac{(f(x+s)-f(x+))\cos\frac{1}{2}s}{\sin\frac{1}{2}s}$. ברור שפונקציה זו גם רציפה למקוטעין חוץ מאולי בנקודה $s=0$ שבה המכנה מתאפסת. אבל היות ו-f גזירה למקוטעין, ניתן לנו לחשב את הגבול כאשר $s\to 0+$ על ידי כלל לופיטל, ומוצאים שהגבול קיים (ושווה ל- $2f'(x+)$). ולכן הפונקציה $\frac{(f(x+s)-f(x+))\cos\frac{1}{2}s}{\sin\frac{1}{2}s}$ היא אכן רציפה למקוטעין, ולפי הלמה של רימן מקדמי הפוריה שלה שואפים ל-0 בגבול $N\to\infty$.
- הגענו למסקנה שהאנטגרל הראשון בנוסחה ל $|S_N-f(x)|$ מלפני שני עמודים שואף ל-0 כאשר N שואף ל-∞. האנטגרל השני - הוכחה דומה, וסיימנו. •