תרגיל 7 –אנליזה למורים-פתרון

שאלה 1

(א) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^4}$

(ב) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\pi k}{n}\right)$

(ג) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{5}{n}\sqrt{4+\frac{5k}{n}}$

(ד) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{2n}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{5k}{2n}\right)$

(ה) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\ln(n!)-\ln n\right)$

(ו) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\cdots+\sqrt{2n}}{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}$

<u>שאלה שנייה:</u>

בכל השאלות הבאות נשתמש בעובדה הבאה. אם f רציפה, ו P_n סדרת חלוקות של קטע עם פרמטר חלוקה שואף לאפס אזי סכומי הרימן שואפים לשטח מתחת לגרף הפונקציה בקטע.

בפרט, המקרה הנפוץ ביותר הוא מהצורה הבאה: $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\to\int_0^1 f(x)dx$ כאשר $P_n=\left\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\dots,1\right\}$.

במבחן צריך להסביר מדוע זה סכום רימן, מהן החלוקות, להזכיר שהפונקציה רציפה ולכן אינטגרבילית בקטע.

1. $\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^4}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3\to\int_0^1 x^3dx=\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1=\frac{1}{4}$

2. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cos\left(\frac{\pi k}{n}\right)\to\int_0^1\cos(\pi x)dx=\left[\frac{\sin(\pi x)}{\pi}\right]_0^1=0$

3. $\sum_{k=1}^{n}\frac{5}{n}\sqrt{4+\frac{5k}{n}}\to\int_0^1 5\sqrt{4+5x}dx=\left[\frac{(4+5x)^{1.5}}{1.5}\right]_0^1=\frac{9^{1.5}}{1.5}-\frac{4^{1.5}}{1.5}$

4. $\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{2n}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{5k}{2n}\right)\to\int_0^1\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{5}{2}x\right)dx=\frac{\pi}{2}\left[-\frac{2}{5}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{5}{2}x\right)\right]_0^1=\frac{\pi}{2}\left(\frac{2}{5}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\frac{2}{5}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{5}{2}\right)\right)$

.5 $$\frac{1}{n}\ln(n!)-\ln(\mathrm{n})=\frac{1}{n}\ln(1\cdot 2\cdots n)-\frac{1}{n}\mathrm{n}\ln(\mathrm{n})=\frac{1}{n}\left(\ln(1)-\ln(n)+\ln(2)-\ln(n)+\ldots+\ln(\mathrm{n})-\ln(\mathrm{n})\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\ln(k)-\ln(\mathrm{n})\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\ln\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$

לכאורה היינו אומרים כעת שזה שואף לאינטגרל $\int_0^1 \ln(x)dx$ אבל זה אינטגרל לא אמיתי! (הפונקציה

$\ln(x)$ אינה חסומה בקטע ולכן אינה אינטגרבילית).

ננסה כיוון אחר של פתרון:

$$\frac{1}{n}\ln(n!)-\ln(n)=\frac{\ln(n!)-n\ln(n)}{n}=\frac{\ln(n!)-\ln(n^n)}{n}=\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)=\ln\left(\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}\right)$$

אבל כבר למדנו שבעזרת כלל המנה ניתן לחשב את הגבול $\frac{1}{e}\leftarrow\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$ ולכן סה"כ

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\ln(n!)-\ln(n)\right)=-1$$

<u>הערה:</u> נחשב את האינטגרל הלא אמיתי

$$\int_0^1 \ln(x)dx=\lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \ln(x)dx=\lim_{t\to 0^+}\left[x\ln(x)-x\right]_t^1=\lim_{t\to 0^+}\left(-1-t\ln(t)+t\right)=-1$$

(שימו לב שניתן להוכיח ש $t\ln(t)\xrightarrow{t\to 0^+}0$ כפי שלמדנו בחישוב גבולות).

האם זה מקרי שקבלנו את אותה תוצאה? לא.

סכומי דרבו עליונים של פונקציה חסומה מלעיל, יתכנסו לאינטגרל הלא אמיתי שלה.

(זה משפט שלא למדנו.)

.6 $$\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\ldots+\sqrt{2n}}{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}=\frac{\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n+k}}{\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}}=\frac{\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}}}{\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n}\sqrt{\frac{k}{n}}}=\frac{\sqrt{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}}}{\sqrt{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}}=\frac{\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}}}{\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}}=$$

$$=\frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}}}{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}}=\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}}}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{\frac{k}{n}}}\to\frac{\int_0^1\sqrt{1+x}}{\int_0^1\sqrt{x}}=\frac{\left[\frac{(1+x)^{1.5}}{1.5}\right]_0^1}{\left[\frac{x^{1.5}}{1.5}\right]_0^1}=\frac{\frac{2^{1.5}}{1.5}-\frac{1}{1.5}}{\frac{1}{1.5}}=2^{1.5}-1$$

שני תרגילים הבאים יעסקו בנושא גזירה של אינטגרלים.

שאלה 2

(א) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (t\cot t-1)\,dt}{x^3}$

(ג) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}(\arcsin 2t-2\arcsin t)\,dt}{x^8}$

(ב) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\int_0^x \sqrt{1+t^4}\,dt}{x^3}$

(ד) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{3x^5} e^{-\frac{1}{t}}\,dt}{x^{81}}$

תזכורת: $\left(\int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,\mathrm{dt}\right)' = f\left(h(x)\right)h'(x)-f\left(g(x)\right)g'(x)$

א. ראשית, נשים לב כי $\lim\limits_{x\to 0} x\cot(x)=\lim\limits_{x\to 0} x\dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin(x)}\cos(x)=1$ ולכן מדובר באינטגרל אמיתי במונה. כעת:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int\limits_0^x (t\cot(t)-1)\,dt}{x^3}\underset{L'Hopital}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{x\cot(x)-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x\cos(x)}{\sin(x)}-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos(x)-\sin(x)}{3x^2\sin(x)}\underset{L'Hopital}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin(x)}{6x\sin(x)+3x^2\cos(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin(x)}{6\sin(x)+3x\cos(x)}\underset{L'Hopital}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos(x)}{6\cos(x)+3\cos(x)-3x\sin(x)}=-\frac{1}{9}$$

ב. נשים לב כי $1\le\sqrt{1+t^4}$ ולכן $\lim\limits_{x\to\infty}\int\limits_0^x\sqrt{1+t^4}\,dt\ge\lim\limits_{x\to\infty}\int\limits_0^x 1dt=\lim\limits_{x\to\infty}x=\infty$. ולכן:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\int\limits_0^x\sqrt{1+t^4}\,dt}{x^3}\underset{L'Hopital}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+x^4}}{3x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\sqrt{\frac{1}{x^4}+1}}{3x^2}=\frac{1}{3}$$

ג.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int\limits_0^{x^2}\left(\arcsin(2t)-2\arcsin(t)\right)dt}{x^8}\underset{L'Hopital}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\left(\arcsin(2x^2)-2\arcsin(x^2)\right)2x}{8x^7}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(2x^2)-2\arcsin(x^2)}{4x^6}\underset{L'Hopital}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{4x\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x^4}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\right)}{24x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-4x^4}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}}{6x^4}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^4}-\sqrt{1-4x^4}}{6x^4}\frac{1}{\sqrt{1-4x^4}\sqrt{1-x^4}}$$

כעת $\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1-4x^4}\sqrt{1-x^4}}=1$ ולכן

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^4}-\sqrt{1-4x^4}}{6x^4}\frac{1}{\sqrt{1-4x^4}\sqrt{1-x^4}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^4}-\sqrt{1-4x^4}}{6x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-x^4)-(1-4x^4)}{6x^4\left(\sqrt{1-x^4}+\sqrt{1-4x^4}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\left(\sqrt{1-x^4}+\sqrt{1-4x^4}\right)}=\frac{1}{4}$$

ד.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{3x^5}\left(e^{-\frac{1}{t}}\right)dt}{x^{81}}\underset{L'Hopital}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{15x^4e^{-\frac{1}{3x^5}}}{81x^{80}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{15e^{-\frac{1}{3x^5}}}{81x^{76}}\overset{t=\frac{1}{x^5}}{=}\lim_{t\to\infty}\frac{15}{81}\frac{e^{-\frac{1}{3}t}}{\left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{76}{5}}}=\lim_{t\to\infty}\frac{15}{81}\left(\frac{t}{e^{\frac{5}{3\cdot 76}t}}\right)^{\frac{76}{5}}=0$$

שימו לב שהמעבר האחרון נכון בגלל ש

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{\frac{5}{3\cdot 76}t}}\underset{L'Hopital}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\frac{5}{3\cdot 76}e^{\frac{5}{3\cdot 76}t}}=\frac{1}{\infty}=0$$

שאלה 3 (ממבחן של ארז)

תהי $f(x)$ פונקציה גזירה ואי שלילית, כלומר לכל x מתקיים $0\le f(x)$.

נגדיר את הפונקציה $g(x)=x\int_0^x f(t)dt$.

א. הוכיחו כי הפונקציה $g(x)$ מונוטונית עולה בתחום $[0,\infty)$.

ב. נניח בנוסף כי $f(x)$ מונוטונית עולה, הוכיחו כי $g(x)$ מחייכת (קמורה) בתחום $[0,\infty)$.

תזכורת: פונקציה גזירה בתחום היא מונוטונית עולה אם הנגזרת הראשונה גדולה מאפס באותו התחום.

פונקציה גזירה פעמיים היא קמורה בתחום אם הנגזרת השנייה שלה היא חיובית באותו התחום.

הערה: תשמו לב ש-

$$g(x)=x\int_0^x f(t)dt$$

היא מכפלה של שתי פונקציות ולכן גזרו אותה לפי כלל המכפלה

שאלה 3

תהי f גזירה ואי שלילית, כלומר לכל x מתקיים $f(x) \geq 0$. נגדיר את הפונקציה $g(x) = x\int_0^x f(t)dt$

א) הוכיחו כי $g(x)$ מונוטונית עולה בתחום $[0,\infty)$ץ

הוכחה: נראה ש־$g^{'}(x) \geq 0$ לכל $x \geq 0$.

$g^{'}(x) = \int_0^x f(t)dt + xf(x)$

$f(x) \geq 0$ לפי הנתון

$x \geq 0$ ב־$[0,\infty)$

$\int_0^x f(t)dt \geq 0$ לכל $x \geq 0$ כי f אי שלילית

ולכן $g^{'}(x) \geq 0$ ב־$[0,\infty)$ כסכום של אי שליליות ולכן g מונוטונית עולה בתחום הנתון.

ב) נניח בנוסף כי $f(x)$ מונוטונית עולה, הוכיחו כי $g(x)$ מחייכת (קמורה) בתחום $[0,\infty)$

הוכחה:

נשים לב ש־$g(x)$ גזירה פעמיים ב־$[0,\infty)$ ולכן כדי להראות שהפונקציה היא קמורה בתחום הנתון מספיק להראות ש

$g^{''}(x) \geq 0$ לכל $x \in [0,\infty)$

$g^{''}(x) = f(x) + f(x) + x \cdot f^{'}(x) = 2f(x) + x \cdot f^{'}(x)$

$f(x) \geq 0$ לפי הנתון

$f^{'}(x) \geq 0$ כי לפי התון של סעיף ב' f היא מונוטונית עולה

ולכן $g^{''}(x) \geq 0$ ב־$[0,\infty)$ כסכום של חיוביות

ולכן g קמורה בתחום הנתון