תרגיל בית מספר 2

<u>מהחוברת של בועז צבאן:</u>

<u>עמוד 2 והלאה:</u>

תרגיל 1.3, סעיפים ב,ה

תרגיל 2.2, סעיף ג

תרגיל 2.3, סעיפים ב,ד

תרגיל 4.1

תרגיל 4.4, סעיף א

<u>תרגיל לא מהחוברת:</u>

יהי $\mathbb{C}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(a,b):a,b\in\mathbb{R}\}$ שדה המספרים המרוכבים עם האיברים הנייטרליים $0_{\mathbb{C}}=(0,0)$, $1_{\mathbb{C}}=(1,0)$. לכל $(a,b),(c,d)\in\mathbb{C}$ נגדיר את פעולות הכפל והחיבור באופן הבא: $(a,b)+_{\mathbb{C}}(c,d)=(a+c,b+d)$, $(a,b)\cdot_{\mathbb{C}}(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$.

א. הוכיחו כי אכן מתקיימת אקסיומת הדיסטריביוטיביות (פילוג).
ב. הוכיחו כי לכל איבר בשדה הנתון אכן קיים איבר הופכי, ומצאו איבר זה.
ג. מצאו איבר $(a,b)\in\mathbb{C}$ המקיים $(a,b)^2+1_{\mathbb{C}}=0_{\mathbb{C}}$.
ד. יהי F שדה כלשהו. נניח כי קיים $a\in F$ המקיים $a^2+1=0$. הוכיחו כי במקרה זה $F\times F$ אינו שדה. (הערה: הכפל והחיבור מוגדרים בדומה לכפל והחיבור שהוגדרו בתחילת השאלה).
ה. האם $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ הוא שדה? נמקו היטב!
(הערה: $\mathbb{C}\times\mathbb{C}=\{(a,b):a,b\in\mathbb{C}\}$, והחיבור והכפל מוגדרים באותו האופן כמו עבור $\mathbb{C}$)

בהצלחה!