לינארית 2 - מועד ב'

7 בספטמבר 2018

מרצה: תמר בר־און.
מתרגל: אחיה בר־און.
עליכם לענות על כל השאלות.
משקל כל שאלה 27 נקודות.
משך המבחן: 3 שעות.
חומר עזר מותר לשימוש: מחשבון פשוט.
בהצלחה!

1. יהי $S=\left\{v_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix},v_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix}\right\}\subseteq\mathbb{R}^4$. מצאו בסיס או"נ ל $W=S^{\perp}$.
(כאשר $\mathbb{R}^4$ עם המכפלה הסקלארית).
פתרון : מתקיים

$$\begin{aligned}W &= \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\middle|\left\langle\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix},v_1\right\rangle=0\wedge\left\langle\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix},v_1\right\rangle=0\right\} = \\ &= \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\middle|\left\langle\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle=0\wedge\left\langle\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix}\right\rangle=0\right\} = \\ &= \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\middle|\left\{\begin{array}{ccc}x+y+w&=&0\\x+y+z+2w&=&0\end{array}\right.\right\}\end{aligned}$$

כלומר W הוא אוסף הפתרונות של מערכת הומוגנית כבר ראינו זה תת מרחב.
כדי למצוא בסיס נפתור את המערכת

$$\begin{pmatrix}1&1&0&1&0\\1&1&1&2&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&1&0\\0&0&1&1&0\end{pmatrix}$$

לכן

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} -t-s \\ s \\ -t \\ t \end{pmatrix} \middle| t,s \in \mathbb{R} \right\} = Span\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

2. מצאו את צורת ג'ורדן והפולינום המינימלי של המטריצה הבאה:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

פתרון:

למטריצה יש 3 ע"ע: $1, 2, 3$. הר"א של 1 ו2 הוא 1, ולכן מתאים להם בלוק מגודל 1.
נחשב את הר"ג של 3. הוא שווה למימד מרחב האפס של המטריצה:

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

שהוא 1.

לכן ל3 מתאים בלוק 1 מגודל 2. כלומר,

$$J_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

לגבי הפולינום המינילי, ידוע שהחזקה של כל גורם שווה לגודל הבלוק הכי גדול שמתאים לו בצורת ג'ורדן. לכן $m_A(x) = (x-1)(x-2)(x-3)^2$.

3.

(א) הוכיחו שהמטריצה הבאה לכסינה:
$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ - מטריצה מגודל $n \times n$, כך שלכל i,j $A_{i,j} = 1$.
הוכחה:

קל לראות שהמטריצה אינה הפיכה, ולכן יש לה ע"ע 0. הר"ג שלו שווה למימד של מרחב האפס של המטריצה שהוא $n-1$. בנוסף, $tr(A) = n$, וכידוע ה$trace$ של מטריצה שווה לסכום הע"ע. לכן יש ע"ע $\lambda = n$. הר"ג שלו הוא לפחות 1. כלומר, יש לפחות n ו"ע בת"ל. $\Leftarrow$ יש בדיוק n ו"ע בת"ל $\Leftarrow$ A לכסינה.

(ב) תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה לא סקלרית שקיים לה ע"ע ממשי יחיד. הוכיחו שA אינה לכסינה מעל $\mathbb{R}$.

הוכחה:

אם A לכסינה מעל $\mathbb{R}$, כל הע"ע שלה ממשיים. כלומר, יש לA רק ע"ע אחד בסה"כ. נקרא לו λ. אז הצורה האלכסונית של A היא λI. כלומר, קיימת P כך ש$A = P^{-1}\lambda IP = \lambda P^{-1}IP = \lambda I$. בסתירה לכך ש$A$ לא סקלרית.

4. יהי V ממ"פ מעל $\mathbb{C}$, ותי $T : V \to V$ הע"ל.

(א) הוכיחו שT^*T הוא אופרטור הרמיטי (צמוד לעצמו).

הוכחה:

$(T^*T)^* = T^*(T^*)^* = T^*T$.

(ב) הוכיחו שכל הע"ע של T^*T הם ממשיים אי־שליליים.

הוכחה:

ראשית, ידוע שלכל מטריצה צל"ע, הע"ע ממשיים. כעת נוכיח שהם אי־שליליים. יהי λ ע"ע עם ו"ע v.

$$\lambda\langle v,v\rangle = \langle \lambda v,v\rangle = \langle T^*Tv,v\rangle = \langle Tv,Tv\rangle$$

כלומר, $\lambda = \frac{||Tv||^2}{||v||^2} \geq 0$.

שימו לב שניתן לחלק ב$||v||^2$, מכיוון שv ו"ע ולכן שונה מ0, מה שאומר שהנורמה שלו שונה מ0.