אלגברה מופשטת 2 – תרגיל בית 8

מתרגלים: ד"ר אפי כהן ואדם צ'פמן.

שאלה 1

א. הוכיחו שאיבר $a \in R$ הוא אי פריק אם ורק אם האידיאל Ra מקסימאלי בין כל האידיאליים בראשיים (האמיתיים) של R.

ב. אם $p \in R_0 \subseteq R$ ו p אי פריק ב R אז הוא אי פריק גם ב R_0. תן דוגמא נגדית לכיוון ההפוך.

שאלה 2

יהי $f(x) = x^4 - p^2$ פולינום ב $\mathbb{Z}[x]$. כאשר $p > 2$ ראשוני. על פי הפירוק של f לגורמים ליניאריים מעל שדה המרוכבים, פרקו את f למכפלת שני פולינומים ריבועיים מעל שדה הממשיים. הראו ש f אי פריק מעל $\mathbb{Q}$.

שאלה 3

הוכיחו כי הפולינום $x^3y + x^3 - x^2y + xy - x^2 + y^2 + x + 2y + 2$ הוא אי פריק ב $\mathbb{Z}[x, y]$.

שאלה 4

מצאו את האידיאלים המקסימליים בחוג המנה $\mathbb{Q}[x] \big/ \left\langle (x-5)^2 (x-4) \right\rangle$.

שאלה 5

הראה כי אם R חוג קומוטטיבי עם יחידה ו $f, g \in R[x]$ כך ש $g(x)$ פולינום מתוקן, אזי קיימים $r, q \in R[x]$ כך ש $f = gq + r$ וגם $\deg(r) < \deg(g)$ או $r = 0$.

שאלה 6

א. יהי $\left\langle -5+\sqrt{3} \right\rangle \triangleleft \mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$ הוכיחו בעזרת הנורמה של $-5+\sqrt{3}$ כי בחוג המנה $\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right] \big/ \left\langle -5+\sqrt{3} \right\rangle$ יש 22 איברים.

ב. נגדיר $\varphi : \mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right] \to \mathbb{Z}_{11}$ ע"י $\varphi\left(a+\sqrt{3}b\right) = a + 5b$. הוכיחו שזהו אפימורפיזם.

ג. הוכיחו על סמך סעיף א ש $\left\langle -5+\sqrt{3} \right\rangle \subset \ker\varphi$ (מכיל ממש).

ד. הראו ש $11 \notin \left\langle -5+\sqrt{3} \right\rangle$ אבל $11 \in \ker\varphi$.

ה. הוכיחו כי $\mathbb{Z}_{11} \cong \mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right] \big/ \left\langle 11, -5+\sqrt{3} \right\rangle$.