סיכום תרגיל כיתה 10
(כולל חומר של ההרצאה 9
ולו כלל חומר של ההרצאה 10)

נוסח בעיה או פתרונה שופרו בחלקם יחסית למה שהיה במפגש הזום

תרגיל כיתה 10

<u>בעיה 1</u>

יהיו $(X, d_X), (Y, d_Y)$ מרחבים מטריים. נגדיר $d: X \times Y \to \mathbb{R}$
באופן הבא: $d\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) := \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\}$

א' <u>הוכחו</u> ש- d מטריקה.

<u>הוכחה</u>

1) $d\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = 0 \Leftrightarrow$
$\max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\} = 0 \Leftrightarrow$
$d_X(x_1, x_2) = 0 \wedge d_Y(y_1, y_2) = 0 \Leftrightarrow$
$x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2 \Leftrightarrow$
$(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.

2) $d\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\} =$
$\max\{d_X(x_2, x_1), d_Y(y_2, y_1)\} = d\big((x_2, y_2), (x_1, y_1)\big)$

3) $d_X(x_1, x_3) \le d_X(x_1, x_2) + d_X(x_2, x_3)$

$d_Y(y_1, y_3) \le d_Y(y_1, y_2) + d_Y(y_2, y_3)$

$d_X(x_1, x_3) \le d\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) + d\big((x_2, y_2), (x_3, y_3)\big)$

$d_Y(y_1, y_3) \le d\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) + d\big((x_2, y_2), (x_3, y_3)\big)$

$$d\big((x_1,y_1),(x_3,y_3)\big) \le d\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) + d\big((x_2,y_2),(x_3,y_3)\big)$$

מש"ל.

ב' מצד אחד, המטרקה d משרה על הקבוצה $X \times Y$ את הטופולוגיה אותה אנחנו נסמן ב- τ_d. ומצד שני, המתריקות d_X ו-d_Y משרות טופולוגיות על X ועל Y. הטופולוגיות האלה יוצרות על $X \times Y$ את טופולוגית המכפלה אותה אנחנו נסמן ב- $\tau_\times$.

<u>הוכיחו</u> ש- $\tau_\times = \tau_d$.

<u>הוכחה</u>.

את הטופולוגיה על $X \times Y$ המושרת על ידי המטריקה d.

נסמן ב- $B_X(x,r), B_Y(y,s)$ כדורים פתוחים במטריקות d_X, d_Y בהתאם. נתבונן באוסף הבא של תת קבוצות ב-$X \times Y$:

$$\boldsymbol{\mathcal{B}} = \{\boldsymbol{B_X(x,r) \times B_Y(y,s)} |\ \boldsymbol{x \in X, y \in Y; r, s} \in \mathbb{R}\ \}$$

<u>מספיק להוכיח ש-$\mathcal{B}$ בסיס לטופולוגיות $\tau_\times$ ו-τ_d.</u>

<u>$\tau_\times$.</u>

ידוע ש- $\{B_X(x,r)\}$ בסיס הטופולוגיה ב-X ו-$\{B_Y(y,s)\}$ בסיס הטופולוגיה ב-Y. לכן, לפי אחד מהמשפטים על מרחב המחפלה שהוכחו בהרצאות, $\mathcal{B} = \{B_X(x,r) \times B_Y(y,s)\}$ בסיס ל-$\tau_\times$, מש"ל.

<u>τ_d.</u>

(סעיף 1 הגדרת הבסיס) נוכיח ש-$B_X(x,r) \times B_Y(y,s) \in \tau_d$:

יהי $(x',y') \in B_X(x,r) \times B_Y(y,s)$. למטרה שלנו מספיק למצוא $R > 0$ כך ש-

$$B_d\big((x',y'),R\big) \subseteq B_X(x,r) \times B_Y(y,s) \qquad (**).$$

נגדיר:

$$R = \min\{r - d_X(x',x), s - d_Y(y',y)\}$$

ונוכיח את ההכלה (**) .

(=========הוכחה ===============

$$(x'',y'') \in B_d\big((x',y'),R\big) \Rightarrow$$

$$d_X(x'',x') < R \le r - d_X(x',x) \Rightarrow$$

$$d_X(x'',x) \le d_X(x'',x') + d_X(x',x) < r \Rightarrow x'' \in B_X(x,r)$$

כלומר, $(x'',y'') \in B_d\big((x',y'),R\big) \Rightarrow x'' \in B_X(x,r)$.

בדיוק באותה דרך נקבל:

$$(x'',y'') \in B_d\big((x',y'),R\big) \Rightarrow y'' \in B_Y(y,s)$$

ולכן לבסוף:

$$(x'',y'') \in B_d\big((x',y'),R\big) \Rightarrow (x'',y'') \in B_X(x,r) \times B_Y(y,s) \, ,$$

=========מש"ל ==================)

כך הוכח ש- $B_X(x,r) \times B_Y(y,s) \in \tau_d$ ולכן $\mathcal{B} \subseteq \tau_d$.

(סעיף 2 הגדרת הבסיס) אם $(x,y) \in U \in \tau_d$ אז קיים $R > 0$ כך ש- $B_d\big((x,y),R\big) \subseteq U$.

אבל $B_d\big((x,y),R\big) = B_X(x,R) \times B_Y(y,R) \in \mathcal{B}$.

(אכן, שני האגפי השוויון אפשר להציג בצורה:
$\{(x',y') \in X \times Y | d_X(x',x) < R \wedge d_Y(y',y) < R\}$).

לכן $(x,y) \in B_X(x,R) \times B_Y(y,R) \subseteq U \in \tau_d$.

כך הוכח ש- $\mathcal{B}$ בסיס של τ_d לפי הגדרה.

ולבסוף: $\tau_\times = \widehat{\mathcal{B}} = \tau_d$, מש"ל.

<u>בעיה 2</u>

<u>א'</u> יהי (M,d) מרחב מטרי . <u>הוכיחו</u> שהפונקציה $d: M \times M \to \mathbb{R}$ רציפה.

<u>הוכחה</u>

נוכיח ש-d רציפה בכל נקודה $(a,b) \in M \times M$.

נסמן: $d(a,b) = r$. תהי V סביבה של r ב-$\mathbb{R}$.

אזי קיים $\varepsilon > 0$ כך ש-$(r-\varepsilon, r+\varepsilon) \subseteq V$. לפי שוויון המשולש לכל $x,y \in M$:

$d(x,y) \le d(x,a) + d(a,b) + d(y,b)$ ו-

לכן: $d(a,b) \le d(x,a) + d(x,y) + d(y,b)$

$d(x,y) - r \le d(x,a) + d(y,b)$ ו-

$r - d(x,y) \le d(x,a) + d(y,b)$

אזי: $|d(x,y) - r| \le d(x,a) + d(y,b)$. מזה נובע ש-

$$(x,y) \in B\left(a,\frac{\varepsilon}{2}\right) \times B\left(b,\frac{\varepsilon}{2}\right) \Rightarrow$$

$$d(x,y) \in (r-\varepsilon, r+\varepsilon) \subseteq V,$$

כלומר:

$$d\left(B\left(a,\frac{\varepsilon}{2}\right) \times B\left(b,\frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \subseteq V.$$

מכיוון ש-$B\left(a,\frac{\varepsilon}{2}\right) \times B\left(b,\frac{\varepsilon}{2}\right)$ פתוחה בטופולוגית המכפלה $M \times M$,

הוכח ש- d רציפה ב-(a,b), מש"ל.

<u>בעיה 7</u> (ממבחן)

יהיו X,Y מ"ט. <u>הוכיחו</u> ש- $f: X \to Y$ רציפה אם"ם לכל $A \subseteq X$ מתקיים: $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

הוכחה.

כיוון 1. נניח לכל A $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$. נניח - בשלילה – f לא רציפה.
אז קיימת $F \subseteq Y$ סגורה כך ש- $f^{-1}(F)$ לא סגורה.
ניקח $A \coloneqq f^{-1}(F)$ אז לפי ההנחה:

$$f\left(\overline{f^{-1}(F)}\right) \subseteq \overline{f\left(f^{-1}(F)\right)} \subseteq \bar{F} = F$$

כלומר, $f\left(\overline{f^{-1}(F)}\right) \subseteq F$ (*)

מכיוון ש - $f^{-1}(F)$ לא סגורה, קיימת נקודה

$x_0 \in \overline{f^{-1}(F)} - f^{-1}(F)$. (**)

(**) גורר ש- $x_0 \notin f^{-1}(F)$ ולכן $f(x_0) \notin F$.

אבל (**) ביחד עם (*) גוררים ש- $f(x_0) \in F$. סתירה.

כיוון 2 נניח f רציפה כלומר, רציפה בכל נקודה ו- (בשלילה)
ישנה קבוצה $A \subseteq X$ כך שלא מתקיים $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.
אז קיימת נקודה $x_0 \in \bar{A}$ כך ש- $f(x_0) \notin \overline{f(A)}$.
נסמן $\left(\overline{f(A)}\right)^c$ ב-V. ברור ש- $f(x_0) \in V$ ו- V פתוחה
כמשלים לסגור. לכן – מהרציפות בנקודה – קיימת סביבה U_{x_0}
של x_0 כך ש- $f\left(U_{x_0}\right) \subseteq V$, ז"א $f\left(U_{x_0}\right) \cap \overline{f(A)} = \emptyset$.
ולכן, בוודאי, - $f\left(U_{x_0}\right) \cap f(A) = \emptyset$. (***)
אבל $U_{x_0} \cap A \neq \emptyset$ כיוון ש- $x_0 \in \bar{A}$. לכן קיים $x \in U_{x_0} \cap A$
ואז $f(x) \in f(A)$ שסותר ל-(***)

<u>בעיה 3</u>

<u>יהיו</u> $X_1, X_2, Y, Y_{!}, Y_2$ מ"ט. יהיו: $g_1: Y \to X_1, g_2 Y \to X_2$,
$f_1: Y_1 \to X_1, f_2 Y_2 \to X_2$ העתקות.
יהיו $q_1: X_1 \times X_2 \to X_1, q_2: X_1 \times X_2 \to X_2$ הטלות.

א' <u>הוכיחו</u> ש- (g_1, g_2) פתוחה אם"ם g_1, g_2 פתוחות.

<u>תזכורת</u>

העתקה (g_1, g_2) מוגדרת על ידי נוסחה $(g_1, g_2)(y) = (g_1(y), g_2(y))$
היא מקיימת את השוויונות: $g_1 = q_1 \circ (g_1, g_2), g_2 = q_2 \circ (g_1, g_2)$.
(קל לבדוק ישירות שאינה קיימת העתקע שונה מ-(g_1, g_2) שמקיימת את השווינות האלה!).
<u>כל מה שנאמר נכון בלי שום קשר לטופולוגיות בקבוצות ולרציפות ההעתקות.</u>

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[ddl, "g_1"'] \arrow[d, dashed, "(g_1, g_2)"] \arrow[ddr, "g_2"] & \\ & X_1 \times X_2 \arrow[dl, "q_1"] \arrow[dr, "q_2"'] & \\ X_1 & & X_2 \end{tikzcd}$$

במידה ואנחנו "ניזכר" על טופולוגיות ורציפות, אז מתקיים המשפט שהוכח בארצאה: (g_1, g_2) רציפה אם"ם g_1, g_2 רציפות.

התרגיל א' מבקש להוכיח ש- (g_1, g_2) פתוחה אם"ם g_1, g_2 פתוחות.

<u>הוכחה:</u>
<u>כיוון 1.</u> תהי (g_1, g_2) פתוחה. אזי $g_i = q_i \circ (g_1, g_2)$ $(i = 1,2)$
פתוחה כי ההטלה q_i פתוחה (ההרצאה), מש"ל.
<u>כיוון 2.</u> יהיו g_1, g_2 פתוחות. תהי V פתוחה ב-Y.
אזי $(g_1, g_2)(V) = g_1(V) \times g_2(V)$.
$g_1(V), g_2(V)$ פתוחות ב-X_1, X_2 בהתאם כי g_1, g_2 פתוחות.
לכן $g_1(V) \times g_2(V)$ פתוחה ב-$X_1 \times X_2$ לפי הגדרת טופולוגית המכפלה. אזי (g_1, g_2) פתוחה, מש"ל.

ב' <u>הוכיחו</u> ש- $f_1 \times f_2$ פתוחה אם"ם f_1, f_2 פתוחות.

<u>תזכורת.</u>
הבניה של $f_1 \times f_2$ נעשת כמקרה פרטי של הבניה עליה דיברנו בסעיף א': נסמן ב-p_1, p_2 הטלות של $Y_1 \times Y_2$ ל-Y_1, Y_2 בהתאם.
נגדיר $Y := Y_1 \times Y_2$ ו- $g_1 := f_1 \circ p_1,\ g_2 := f_2 \circ p_2$.
נגדיר $f_1 \times f_2 : Y_1 \times Y_2 \to X_1 \times X_2$ על ידי השוויון:

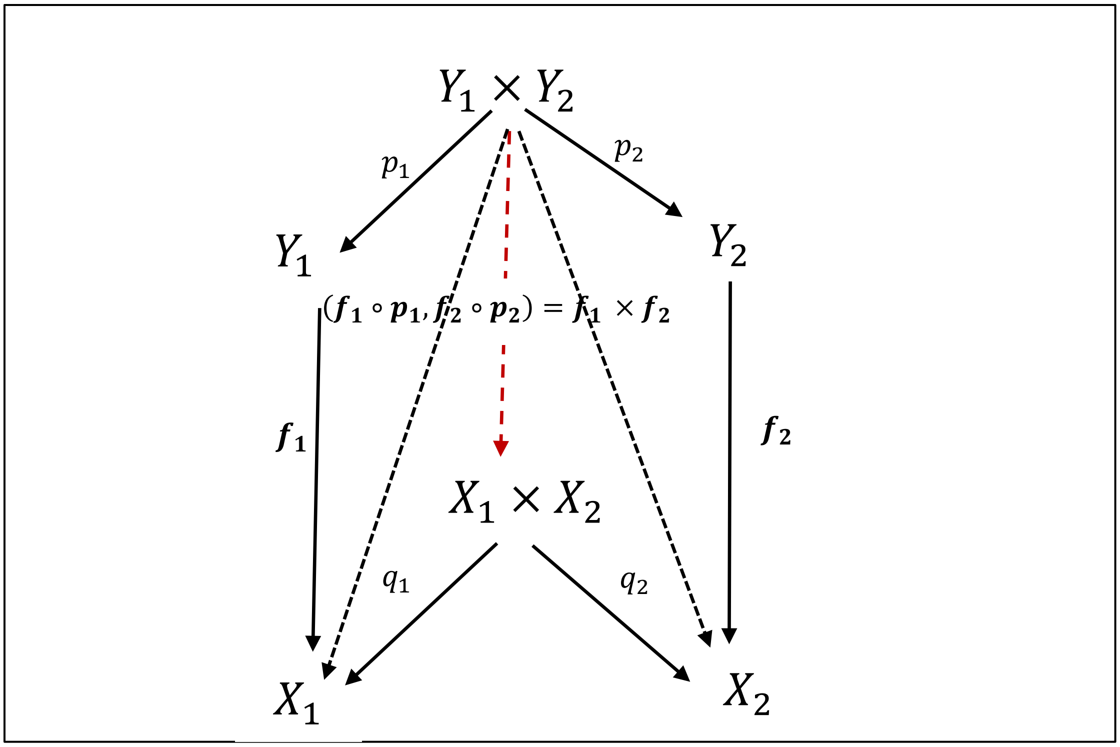
$$f_1 \times f_2 := (g_1, g_2) = (f_1 \circ p_1, f_2 \circ p_2)$$

לפי הבניה הקודמת:

$$(f_1 \times f_2)((y_1, y_2) = (f_1(y_1), f_2(y_2))$$

$$f_1 \circ p_1 = q_1 \circ (f_1 \times f_2)$$

$$f_2 \circ p_2 = q_2 \circ (f_1 \times f_2)$$



כמו קודם, <u>כל מה שנאמר נכון בלי שום קשר לטופולוגיות בקבוצות ולרציפות ההעתקות.</u>
במידה ואנחנו "ניזכר" על טופולוגיות ורציפות, אז מתקיים משפט שהוכח בארצאה: $f_1 \times f_2$ רציפה אם"ם f_1, f_2 רציפות.

התרגיל ב' מבקש להוכיח ש- $f_1 \times f_2$ פתוחה אם"ם f_1, f_2 פתוחות.
<u>הוכחה</u>.

הוכח בהרצאה שכל הטלה פתוחה.
<u>כיוון 1</u>. תהי $f_1 \times f_2$ פתוחה אזי $q_1 \circ (f_1 \times f_2), q_2 \circ (f_1 \times f_2)$ פתוחות . כלומר, $f_1 \circ p_1, f_2 \circ p_2$ פתוחות.
תהי U_1 פתוחה ב-Y_1 .
אזי $(f_1 \circ p_1)(U_1 \times Y_2) = f_1(p_1(U_1 \times Y_2)) = f_1(U_1)$.
קבוצה $U_1 \times Y_2$ פתוחה. לכן $f_1(U_1)$ פתוחה. אז f_1 פתוחה.
תהי U_2 פתוחה ב-Y_2 .
אזי $(f_2 \circ p_2)(Y_1 \times U_2) = f_2(p_2(Y_1 \times U_2)) = f_2(U_2)$.

קבוצה $Y_1 \times U_2$ פתוחה. לכן $f_2(U_2)$ פתוחה. אז f_2 פתוחה.

<u>כיוון 2</u>. יהיו f_1, f_2 פתוחות. אזי $f_1 \circ p_1, f_2 \circ p_2$ פתוחות כי ההטלות פתוחות. לכן $q_1 \circ (f_1 \times f_2),\ q_2 \circ (f_1 \times f_2)$ פתוחות ולפי סעיף א', $f_1 \times f_2$ פתוחה, מש"ל

<u>בעיה 4</u>

יהיו $Y, X_1, \dots, X_n$ מ"ט כך שהמרחבים $X_i (1 \le i \le n)$ זרים.
יהיו $e_i : X_i \to X_i \sqcup \dots \sqcup X_n$ הכלות הטבעיות.

<u>הוכיחו</u> ש- $f : X_1 \sqcup \dots \sqcup X_n \to Y$ פתוחה אם"ם $f \circ e_i$ פתוחה לכל $1 \le i \le n$.

<u>הוכחה</u>

<u>כיוון 1.</u> תהי f פתוחה. כל ההעתקות e_i פתוחות (ההרצאה). לכן כל $f \circ e_i$ פתוחה כהרכבת הפתוחות, מש"ל.
<u>כיוון 2.</u> תהי כל $f \circ e_i$ פתוחה. תהי $U \subseteq X_i \sqcup \dots \sqcup X_n$ קבוצה פתוחה. אזי כל קבוצה $V_i := U \cap X_i$ פתוחה ב-X_i.
ברור ש-$U = \cup_{i=1}^{n} V_i$. חוץ מזה $e_i(V) = V$ כי e_i הכלה של X_i.
לכן

$$f(U) = f(\cup_{i=1}^{n} V_i) = \cup_{i=1}^{n} f(V_i) = \cup_{i=1}^{n} f\big(e_i(V)\big)$$
$$= \cup_{i=1}^{n} f \circ e_i(V)$$

כל קבוצה $f \circ e_i(V)$ פתוחה ב-Y כתמונה של קבוצה פתוחה תחת העתקה פתוחה. אז האחוד האחרון פתוח ולכן $f(U)$ פתוחה.
כך הוכח ש- f פתוחה, מש"ל.