תורת גלואה – בוחן שליש – פתרון

יש לענות על כל השאלות. ניקוד כל אחת משאלות 1—4 הוא 27 נקודות (אך הציון הכולל לא יעלה על 100).

חומר עזר מותר: חומרי הרצאה ותרגול בלבד.

משך הבוחן: שעתיים.

0. כתבו את ההצהרה הבאה בתחילת המבחן וחתמו בצידה:
"פתרתי בוחן זה ביושר ובהגינות, ללא כל סיוע חיצוני, ובעזרת חומרי העזר המותרים בלבד".

1. הוכיחו/הפריכו: אם $[F(\alpha):F]=2$ אז $[F(\sqrt{\alpha+1}):F]=4$.

פתרון. הפרכה. כדי לחפש דוגמה נגדית, נברר מתי $\sqrt{\alpha+1}=c_0+c_1\alpha$. נעלה בריבוע ונקבל:

$$\boldsymbol{\alpha+1=c_0^2+2c_0c_1+c_1^2\alpha^2}$$

נבחין כי אם נבחר $F=\mathbb{Q}$, $c_0=0, c_1=1$ נקבל $\alpha^2-\alpha-1=0$ (קל לראות שאין לפולינום שורש רציונלי, כך שאכן $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]=2$) אך $\mathbb{Q}(\sqrt{\alpha+1})=\mathbb{Q}(\alpha)$.

יש שפע דוגמות נגדיות; גישה קצת יותר מתחכמת היא לבחור $F=\mathbb{R}$, $\alpha\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$.

2. הוכיחו כי לפולינום $f(x)=(x^3-2)(x^3-3)(x^3-6)(x^3-12)$ יש שורש מודולו p לכל p ראשוני.

פתרון. ראשית נבחין כי עבור $p=2,3$ ישנו שורש: 0. עבור p ראשוני כללי, ניזכר כי $\mathbb{F}_p^\times\cong\mathbb{Z}/(p-1)$ ולכן אם $p-1$ אינו מתחלק ב-3 הרי שכל אבר ב-$\mathbb{F}_p^\times$ הוא חזקה שלישית (בפרט, 2 הוא כזה ולכן יש לפולינום שורש). אחרת, אם $p-1$ מתחלק ב-3, נקבל כי:

$$\mathbb{F}_p^\times/\left(\mathbb{F}_p^\times\right)^3\cong\mathbb{Z}/(3)$$

ולכן אם 2,6 באותו קוסט של $\mathbb{F}_p^\times$ מודולו $\left(\mathbb{F}_p^\times\right)^3$ הרי ש-$3=\frac{6}{2}$ הוא חזקה שלישית; ואם 2,6 בקוסטים שונים מודולו תת-חבורה זו, הרי ש-$12=2\cdot 6$ חזקה שלישית. בכל מקרה, ישנו פתרון למשוואה $f(x)=0$.

3. חשבו את $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]$ עבור:

$$\alpha = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}+1}+1}+1}$$

הוכיחו את תשובתכם.

פתרון. נבחין כי הפולינום הבא מתאפס ב-α:

$$\boldsymbol{f(x) = (((x^2-1)^2-1)^2-1)^2-3 = ((x^4-2x^2)^2-1)^2-3 =}$$
$$\boldsymbol{x^8(x^2-2)^4-2x^4(x^2-2)^2-2}$$

כעת נבחין כי המקדמים הבינומיים של $(a+b)^4$ זוגיים, פרט לראשון ולאחרון כמובן. בפרט עבור $a = x^2, b = -2$ נקבל כי כל המקדמים פרט לעליון – זוגיים. מכיוון שכך, נקבל כי $f(x)$ פולינום אייזנשטיין ביחס ל-$p = 2$, ולכן אי-פריק. נסיק כי $f(x)$ הינו הפולינום המינימלי של α מעל $\mathbb{Q}$, ולכן:

$$[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}] = deg(f) = 16.$$

4. תהא $K/\mathbb{Q}$ הרחבת שדות ממימד 3 הנוצרת על ידי איבר $\theta \in K$ בעל התכונה הבאה: המקדם של x^2 בפולינום המינימלי של θ (מעל $\mathbb{Q}$) הוא אפס. הוכיחו שקיים $c \in \mathbb{Q}$ יחיד שעבורו הפולינום המינימלי של $\theta^2 + c$ מקיים את אותה תכונה. מצאו את c המתאים כאשר $\theta^3 + 2\theta + 1 = 0$.

פתרון. נכתוב $\theta^3 + a\theta + b = 0$ עבור $a, b \in \mathbb{Q}$. לכל $c \in \mathbb{Q}$, נסמן $\alpha_c = \theta^2 + c$. אנו יודעים כי $deg(\alpha_c)|3$, אך בבירור $\alpha_c \notin \mathbb{Q}$ (שאז $deg(\theta) \le 2$, בסתירה לנתון). לפיכך $deg(\alpha_c) = 3$, ונחשב את הפולינום המינימלי שלו.

נתבונן בהצגה הרגולרית; $\{1, \theta, \theta^2\}$ מהווה $\mathbb{Q}$-בסיס ל-K, ולכן המטריצה המייצגת של פעולת הכפל ב-α_c הינה:

$$\begin{bmatrix} c & -b & 0 \\ 0 & c-a & -b \\ 1 & 0 & c-a \end{bmatrix}$$

הפולינום האופייני של מטריצה זו הינו:

$$\begin{vmatrix} x-c & b & 0 \\ 0 & x-(c-a) & b \\ -1 & 0 & x-(c-a) \end{vmatrix} = (x-c)\big(x-(c-a)\big)^2 - b^2 =$$
$$(x-c)(x^2-2(c-a)x+(c-a)^2) - b^2$$

פולינום זה ממתאפס ב-α_c ומהנימוקים שלעיל – משיקולי דרגה – זהו גם הפולינום המינימלי של α_c. קל לראות שהמקדם של x^2 בפולינום זה הינו $-3c+2a$, ומעל $\mathbb{Q}$ ישנו פתרון יחיד לאילוץ $-3c+2a = 0$. בפרט, עבור הפולינום שניתן, נקבל שהפתרון הוא $c = 4/3$ ולכן הפולינום המינימלי של $\theta^2 + 4/3$ בעל התכונה המבוקשת.