לינארית 1 הרצאה 6

<u>תזכורת:</u>

מרחב וקטורי V מעל שדה F – מוגדרות פעולות של חיבור וכפל בסקלר, שמקיימות הרבה תכונות "נחמדות". דוגמאות נפוצות: $F^{m\times n}, F^n, F_n\left[x\right]$.

אם V מרחב וקטורי ו-$U\subseteq V$ גם מרחב וקטורי, עם אותן הפעולות של V, אז U נקראת תת-מרחב של V.

קריטריון מקוצר לתת-מרחב – U ת"מ, אם מתקיימים שני תנאים:

א. $0_V\in U$.

ב. לכל $u,v\in U$ ולכל $\alpha\in F$: $\alpha u+v\in U$.

חיתוך של תתי-מרחבים הוא תת-מרחב, בעוד שאיחוד של תתי-מרחבים איננו בהכרח תת-מרחב.

החיתוך $U\cap W$ הוא הת"מ הכי גדול שמוכל גם ב-U וגם ב-W, כלומר אם תת-מרחב T מקיים: $T\subseteq U,W$, אז בהכרח: $T\subseteq U\cap W$.

בקבוצות, הקבוצה הכי קטנה שמכילה את U,W היא $U\cup W$. כלומר, אם קבוצה T מכילה את U,W אז בהכרח: $U\cup W\subseteq T$.

<u>סימון:</u> אם $U\subseteq V$ ת"מ, אפשר לסמן: $U\leq V$.

שאלה: מתי, אם בכלל, איחוד של תתי-מרחבים הוא גם תת-מרחב?

טענה:

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F, ויהיו $U,W \leq V$ תתי-מרחבים. אזי:

$U \cup W \leq V$ אם ורק אם $U \subseteq W \vee W \subseteq U$.

כלומר, האיחוד הוא תת-מרחב רק כאשר אחד מהתתי-מרחבים מכיל את השני.

למשל: $U = \{(a,0) : a \in \mathbb{R}\}, W = \{(0,b) : b \in \mathbb{R}\} \leq \mathbb{R}^2$. האיחוד לא סגור לחיבור - למשל, $(1,0),(0,1) \in U \cup W$, אך $(1,1) \notin U,W$ ולכן גם: $(1,1) \notin U \cup W$.

הוכחה:

$\rightarrow$: אם $U \subseteq W \vee W \subseteq U$, אז: $U \cup W = U \vee U \cup W = W$, בכל מקרה האיחוד הוא תת-מרחב.

$\leftarrow$: נתון $U \cup W \leq V$, צ"ל: $U \subseteq W \vee W \subseteq U$.

נניח בשלילה ש: $U \nsubseteq W \wedge W \nsubseteq U$. לפי הגדרת הכלה, פירוש הדבר שקיימים u,w כך ש:

$u \in U \wedge u \notin W$ וגם $w \notin U \wedge w \in W$.

מכיוון ש: $U \cup W$ תת-מרחב ו: $u,w \in U \cup W$, נקבל שגם: $u + w \in U \cup W$.

מהגדרת איחוד, $u + w \in U$ או $u + w \in W$. בשני המקרים תתקבל סתירה, נראה למקרה של $u + w \in U$.

מכיוון ש-$u \in U$ ו-U תת-מרחב, גם $-u \in U$. אם כן, $u + w, -u \in U$ ולכן גם: $u + w + (-u) \in U$.

קיבלנו ש: $w \in U$, וזו סתירה.

<u>סכום של תתי-מרחבים:</u>

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F, ויהיו $U,W \leq V$ תתי-מרחבים.

הסכום של תתי המרחבים U,W מסומן: $U+W$, ומוגדר באופן הבא:

$$U+W=\{u+w : u\in U \wedge w\in W\}$$

כלומר, קבוצת כל הסכומים של וקטורים מ-U עם וקטורים מ-W.

למשל:

$$\{(a,0) : a\in\mathbb{R}\}+\{(0,b) : b\in\mathbb{R}\}=\{(a,0)+(0,b) : a,b\in\mathbb{R}\}=$$

$$\{(a,b) : a,b\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}^2$$

דוגמה נוספת:

$$\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} : a,b\in\mathbb{R}\right\}+\left\{\begin{pmatrix} c & c \\ c & c \end{pmatrix} : c\in\mathbb{R}\right\}=$$

$$\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c & c \\ c & c \end{pmatrix} : a,b,c\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\begin{pmatrix} a+c & c \\ c & b+c \end{pmatrix} : a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$$

זהו תת-מרחב של $\mathbb{R}^{2\times2}$, אך לא כל המרחב, למשל $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ לא נמצאת בסכום.

<u>טענה:</u>

א. סכום של תתי-מרחבים הוא תת-מרחב.

ב. הוא תת-המרחב הקטן ביותר שמכיל את שני תתי-המרחבים. כלומר, אם תת-מרחב T מכיל גם את U וגם את W, אז בהכרח: $U+W\subseteq T$.

<u>הוכחה:</u>

יש לנו מרחב V מעל שדה F, $U,W\leq V$.

א. צ"ל: $U+W\leq V$. נשתמש בקריטריון המקוצר:

1. צ"ל: $0_V\in U+W$. מכיוון ש-U,W תתי-מרחבים, $0_V\in U,W$. מהגדרת $U+W$, נקבל: $0_V+0_V\in U+W$, כלומר $0_V\in U+W$.

2. יהיו $v_1,v_2\in U+W$ ו-$\alpha\in F$, צ"ל: $\alpha v_1+v_2\in U+W$.

מכיוון ש: $v_1,v_2\in U+W$, קיימים u_1,w_1,u_2,w_2 כך ש: $v_1=u_1+w_1, v_2=u_2+w_2$, כאשר: $u_1,u_2\in U, w_1,w_2\in W$. כעת:

$$\alpha v_1+v_2=\alpha\left(u_1+w_1\right)+u_2+w_2=\left(\alpha u_1+u_2\right)+\left(\alpha w_1+w_2\right)$$

כעת, מכיוון ש-$u_1,u_2\in U$, גם: $\alpha u_1+u_2\in U$.

כמו כן, מכיוון ש-$w_1,w_2\in W$, גם: $\alpha w_1+w_2\in W$.

לכן, לפי הגדרת $U+W$, נקבל ש: $\left(\alpha u_1+u_2\right)+\left(\alpha w_1+w_2\right)\in U+W$, כנדרש.

ב. ראשית, כל וקטור $u \in U$ אפשר לרשום כך: $u = u + 0_V \in U + W$, כלומר: $u \in U + W$, לפי הגדרת הכלה נקבל: $U \subseteq U + W$. באופן דומה, אפשר להראות ש: $W \subseteq U + W$.

כעת, יהי $T \leq V$ תת-מרחב שמכיל את U, W, ונראה ש: $U + W \subseteq T$.

אם כן, יהי $v \in U + W$, צ"ל: $v \in T$.

מכיוון ש: $v \in U+W$, לפי הגדרת הסכום נקבל שקיימים $u \in U, w \in W$ כך ש: $v = u + w$.

מכיוון ש: $U, W \subseteq T$, $u, w \in T$. T ת"מ, ולכן גם $u + w \in T$, כלומר $v \in T$, כנדרש.

<u>תכונות של סכום:</u>

1. נדגיש את ההגדרה של סכום:

$$v \in U + W \iff \exists u \in U \exists w \in W : v = u + w$$

2. $U + W = W + U$.
3. $(U + W) + T = U + (W + T)$.
4. $U + \{0_V\} = U$.
5. אם $U \subseteq W$, אז $U + W = W$.

אפשר לשאול, למשל, האם: $U \cap (W + T) = (U \cap W) + (U \cap T)$?

<u>סכום ישר:</u>

אם $U \cap W = \{0_V\}$, נאמר שהסכום $U + W$ הוא ישר, ונסמן: $U \oplus W$.

זו אותה פעולה כמו סכום, רק שמתקיים תנאי נוסף על המרחבים U, W.

למשל: הסכום $\{(a,0) : a \in \mathbb{R}\} + \{(0,b) : b \in \mathbb{R}\}$ הוא ישר, מכיוון ש:

$$\{(a,0) : a \in \mathbb{R}\} \cap \{(0,b) : b \in \mathbb{R}\} = \{(0,0)\}$$

ולכן אפשר לסמן: $\{(a,0) : a \in \mathbb{R}\} \oplus \{(0,b) : b \in \mathbb{R}\}$.

מצד שני, הסכום: $\{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] : p(1) = 0\} + \{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] : p(2) = 0\}$

איננו ישר, מכיוון שבחיתוך יש פולינומים שונים מ-0, למשל:

$$(x-1)(x-2) \in \{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] : p(1) = 0\} \cap \{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] : p(2) = 0\}$$

מהיום, לסכום שאיננו ישר נקרא "סכום עקום".

<u>טענה:</u>

מה מייחד סכומים ישרים מ"סתם" סכומים?

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F ויהיו $U, W \leq V$.

הסכום $U + W$ הוא ישר אם ורק אם לכל וקטור $v \in U + W$ קיימים $u \in U, w \in W$ **יחידים** כך ש: $v = u + w$.

במילים אחרות, כל וקטור ניתן להציג כסכום באופן יחיד.

למשל, בסכום: $\{(a,0) : a \in \mathbb{R}\} \oplus \{(0,b) : b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$, כל וקטור

$(x,y) \in \mathbb{R}^2$ אפשר להציג רק באופן הבא:

$$(x,y) = (x,0) + (0,y)$$

מצד שני, בסכום: $\{(a,b,0) : a,b \in \mathbb{R}\} + \{(0,c,d) : c,d \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3$,
אפשר להציג וקטורים באמצעות יותר מסכום אחד, למשל:

$$(1,2,3) = (1,1,0) + (0,1,3) = (1,0,0) + (0,2,3)$$

<u>צירופים ליניאריים והמרחב הנפרש:</u>

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F ותהי $S \subseteq V$ קבוצה.

וקטור $v \in V$ נקרא **צירוף ליניארי** של איברי S (או פשוט "של S")
אם קיימים וקטורים $v_1, \ldots, v_k \in S$ וסקלרים $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in F$ כך ש:
$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$. סקלר כפול וקטור ועוד סקלר כפול וקטור...

למשל, $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(1,0,1), (-2,2,5)\}$. הוקטור $(0,2,7)$ הוא
צירוף ליניארי של איברי S, מכיוון ש:

$$(0,2,7) = 2 \cdot (1,0,1) + 1 \cdot (-2,2,5)$$

כלומר, הסקלרים הם: $2,1$. גם הוקטור $\left(1,-1,-\frac{5}{2}\right)$ הוא צירוף ליניארי

של איברי S, מכיוון ש:

$$\left(1,-1,-\frac{5}{2}\right)=0\cdot(1,0,1)-\frac{1}{2}\cdot(-2,2,5)$$

ננסה לתת דוגמה לוקטור שאיננו צירוף ליניארי של איברי S, ננסה $(0,0,1)$. אנחנו צריכים להראות שלא קיימים סקלרים α_1,α_2 כך ש:

$$(0,0,1)=\alpha_1(1,0,1)+\alpha_2(-2,2,5)=(\alpha_1-2\alpha_2,2\alpha_2,\alpha_1+5\alpha_2)$$

יש כאן 3 משוואות:

$$\begin{cases}\alpha_1-2\alpha_2=0\\ 2\alpha_2=0\\ \alpha_1+5\alpha_2=1\end{cases}\rightarrow\left(\begin{array}{cc|c}1&-2&0\\0&2&0\\1&5&1\end{array}\right)$$

מהמשוואות הראשונה והשניה, נקבל: $\alpha_1=\alpha_2=0$, וזו סתירה למשוואה השלישית, משמע – אין פתרון. לכן, אכן לא קיימים סקלרים α_1,α_2 כך ש: $(0,0,1)=\alpha_1(1,0,1)+\alpha_2(-2,2,5)$, כלומר $(0,0,1)$ איננו צירוף ליניארי של איברי S.

כעת, **המרחב הנפרש** ע"י הקבוצה S מסומן: $span(S)$ או $sp(S)$, אפשר גם עם סוגריים מסולסלים או בלי סוגריים...המרחב הנפרש ע"י S הוא קבוצת כל הצירופים הליניאריים של איברי S.

<u>טענה:</u>

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F ותהי $S \subseteq V$ תת-קבוצה.

א. $span\left(S\right) \leq V$, זהו תמיד תת-מרחב.

ב. $span\left(S\right)$ הוא תת-המרחב הקטן ביותר שמכיל את S. כלומר, אם $U \leq V$ כך ש: $S \subseteq U$, בהכרח: $span\left(S\right) \subseteq U$.

כמסקנה, נוכל לומר שאם S היא בעצמה תת-מרחב, אז: $span\left(S\right) = S$.

למשל,

$$span\left\{\left(1,0,1\right),\left(-2,2,5\right)\right\} = \left\{\alpha_1\left(1,0,1\right) + \alpha_2\left(-2,2,5\right) : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= \left\{\left(\alpha_1 - 2\alpha_2, 2\alpha_2, \alpha_1 + 5\alpha_2\right) : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

<u>הערה:</u> אנו מגדירים ש: $span\left(\emptyset\right) = \left\{0\right\}$.

<u>שתי שאלות:</u>

1. איך יודעים אם $v \in span\left(S\right)$? כלומר, איך בודקים האם וקטור v הוא צירוף ליניארי של הוקטורים $v_1, \ldots, v_k$? נשים את הוקטורים $v_1, \ldots, v_k$ בעמודות מטריצה, את הוקטור v בעמודה הנוספת ונבדוק האם יש פתרון. אם לא – אז $v \notin span\left\{v_1, \ldots, v_k\right\}$. אם כן – אז $v \in span\left\{v_1, \ldots, v_k\right\}$, והפתרון הוא הסקלרים בצירוף הליניארי.

2. אם כן, יש לנו כרגע 3 דרכים שונות להציג מרחב וקטורי:

א. איבר כללי – למשל: $U = \left\{\left(a,0\right) : a \in \mathbb{R}\right\}$ או $\left\{\left(\alpha_1 - 2\alpha_2, 2\alpha_2, \alpha_1 + 5\alpha_2\right) : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\right\}$.

קבוצת כל הוקטורים מהצורה...

ב. מרחב נפרש – למשל: $span\left\{(1,0,1),(-2,2,5)\right\}$.

ג. אוסף פתרונות של מערכת הומוגנית, למשל: $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y+z=0\}$.

איך עוברים מהצגה אחת לשניה? נענה בהמשך, תוך כדי עבודה.

<u>קבוצה פורשת:</u>

יהיו V מרחב וקטורי מעל שדה F, $U\leq V$.

נאמר שקבוצה S **פורשת** את U, אם $U=span\left(S\right)$.

<u>הערה:</u> אם אומרים S פורשת מבלי לומר איזה תת-מרחב, הכוונה היא ל-V.

למשל, הקבוצה $S=\left\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(3,6,25)\right\}$ פורשת את $\mathbb{R}^3$, מכיוון שכל וקטור $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ אפשר לכתוב כצירוף ליניארי של איברי S:

$$(x,y,z)=x\left(1,0,0\right)+y\left(0,1,0\right)+z\left(0,0,1\right)+0\cdot\left(3,6,25\right)$$

הוקטור $(3,6,25)$ מיותר...כל וקטור אחר גם יהיה מיותר. נשים לב שאפשר להציג אותו באמצעות הוקטורים האחרים – כצירוף ליניארי שלהם.

נשים לב – לפי איך שהגדרנו, $\emptyset$ פורשת את $\{0_V\}$.

<u>תלות ליניארית:</u>

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F ותהי $S\subseteq V$.

צירוף ליניארי של איברי S שבו כל הסקלרים שווים ל-0_V נקרא טריוויאלי.

כעת, S נקראת **תלויה ליניארית** אם יש צירוף ליניארי לא טריוויאלי של איברי S שמתאפס. כלומר, קיימים $v_1,\ldots,v_k\in S$ וסקלרים $\alpha_1,\ldots,\alpha_k\in$

F שלא כולם שווים ל-0 $(\exists i : \alpha_i \neq 0)$ כך ש: $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = 0$.

למשל, הקבוצה: $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (3,6,25)\}$ תלויה ליניארית, מכיוון שיש צירוף ליניארי לא טריוויאלי של איבריה שמתאפס. למשל:

$$3 \cdot (1,0,0) + 6 \cdot (0,1,0) + 25 \cdot (0,0,1) - 1 \cdot (3,6,25) = 0$$

אם S לא תלויה ליניארית, נקרא לה בלתי-תלויה ליניארית - **בת"ל**.

איך אפשר לבדוק שקבוצה היא בת"ל? משווים צירוף ליניארי כללי של איבריה ל-0, ומראים שהסקלרים חייבים להיות 0. למשל, אם רוצים להוכיח ש: $\{(1,0,0), (0,1,0), (3,6,25)\}$ בת"ל, נתנסח כך: יהיו $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in F$ כך ש: $\alpha_1 (1,0,0) + \alpha_2 (0,1,0) + \alpha_3 (3,6,25) = 0$, וצ"ל: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

<u>הערה</u>: נשים לב שאם $0_V \in S$, היא אוטומטית תלויה ליניארית, כי אפשר לרשום: $1 \cdot 0_V = 0_V$.

בקבוצה תלויה ליניארית יש וקטור מיותר...

<u>ברמה הטכנית:</u>

נתונה קבוצה S במרחב וקטורי V.

א. איך נבדוק אם S פורשת את V? אנחנו רוצים שכל איבר $v \in V$ יהיה ב-$span(S)$. לפי מה שהסברנו, נשים את איברי S בעמודות מטריצה, בעמודה הנוספת נשים איבר כללי מ-V ונבדוק האם תמיד - לא משנה מהו v שבעמודה הנוספת - יש פתרון.

למשל, כדי לבדוק האם $S = \left\{(1,0,1), (-2,2,5), \left(0,1,3\frac{1}{2}\right)\right\}$ פורשת

את $\mathbb{R}^3$, נבדוק האם למערכת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & x \\ 0 & 2 & 1 & y \\ 1 & 5 & 3\frac{1}{2} & z \end{array}\right)$$

יש פתרון לכל x, y, z. אם יש פתרון לכל x, y, z אז S פורשת, אם לא אז לא.

ב. איך נבדוק אם S בת"ל? בדומה לפורשת, לוקחים צירוף ליניארי כללי של הוקטורים ב-S, אלא שבמקום להשוות אותו לוקטור כללי, משווים אותו ל-0. כדי שהקבוצה תהיה בת"ל, הפתרון היחיד חייב להיות הפתרון הטריוויאלי – כל הסקלרים מתאפסים. המערכת הזו היא הומוגנית, כי משווים ל-0.

עוד בהרצאה 2 אמרנו: למערכת הומוגנית יש פתרון יחיד פירושו שהפתרון הוא הטריוויאלי.

בשורה התחתונה, כדי לבדוק האם קבוצה S היא בת"ל, נשים את איברי S בעמודות מטריצה ונבדוק האם יש פתרון יחיד למערכת ההומוגנית – שאין משתנה חופשי. אין משתנה חופשי – בת"ל, יש משתנה חופשי – תלויה ליניארית.

למשל, אם נרצה לבדוק האם $S = \left\{(1,0,1), (-2,2,5), \left(0,1,3\frac{1}{2}\right)\right\}$ בת"ל, נבדוק האם למערכת ההומוגנית הבאה:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

יש פתרון יחיד, כלומר האם יש משתנה חופשי.

<u>הערה:</u> אם מדובר במטריצות או פולינומים, אל חשש, גם אותם אפשר לשים בעמודות, אם קודם לכן "מתרגמים" אותם לוקטורים, למשל באופן הבא:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (a,b,c,d)\,,\; ax^2+bx+c \mapsto (a,b,c)$$

למשל, נניח שאנו רוצים לבדוק האם הקבוצה $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 13 & 4 \end{pmatrix} \right\}$ היא בת"ל, אז נתבונן במטריצה שבה שמנו את המטריצות האלו בעמודות – אחרי ש"תירגמנו" אותן לוקטורים:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 13 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 13 & 4 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 + 13\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 5\alpha_2 + 4\alpha_3 \end{cases}$$

באותו אופן:

$$\alpha_1(1,1,0,1)+\alpha_2(-2,2,1,5)+\alpha_3(1,0,13,4)=0 \Longrightarrow \begin{cases} \alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3=0 \\ \alpha_1+2\alpha_2=0 \\ \alpha_2+13\alpha_3=0 \\ \alpha_1+5\alpha_2+4\alpha_3 \end{cases}$$

אנו רואים שאלו אותן משוואות, בסופו של דבר משווים בין רכיבים, ולכן לא משנה אם אלו רכיבים של מטריצה או של וקטור או של פולינומים, למשוואות לא אכפת...