תרגיל 9 לתיכוניסטים - פתרונות

שאלה 1

נחשב את מטריצת יעקובי של f בעזרת נגזרות חלקיות

$$\begin{pmatrix} e^x \sin z & 0 & e^x \cos z \\ 0 & e^y \cos z & -e^y \sin z \\ e^z y & e^z x & e^z xy \end{pmatrix}$$

נציב את הנקודה $(0,1,0)$ ונקבל

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & e & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

זאת מטריצה הפיכה ולכן f הפיכה מקומית ב $(0,1,0)$. מטריצת יעקובי של ההפוכית שלה היא המטריצה ההופכית

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & e & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & e^{-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

שאלה 2

נגדיר את הפונקציה

$$f(x,y) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

1. בכל נקודה $x \in (-1,1)$ שבה $x \neq 0$ ברור ש f דיפרנציאבילית. בנקודה $x = 0$ יתקיים:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t + 2t^2 \sin \frac{1}{t}}{t} = \lim_{t \to 0} 1 + 2t \sin \frac{1}{t} = 1 \neq 0$$

2. עבור כל $k \in \mathbb{N}$

$$f(\frac{2}{(4k+1)\pi}) = \frac{2}{(4k+1)\pi} + 2(\frac{2}{(4k+1)\pi})^2 \sin(2k\pi + \frac{\pi}{2}) = \frac{2}{(4k+1)\pi} + 2(\frac{2}{(4k+1)\pi})^2$$

$$f(\frac{2}{(4k+3)\pi}) = \frac{2}{(4k+3)\pi} + 2(\frac{2}{(4k+3)\pi})^2 \sin(2k\pi + \frac{3\pi}{2}) = \frac{2}{(4k+3)\pi} - 2(\frac{2}{(4k+3)\pi})^2$$

היות ו

$$\frac{2}{(4k+3)\pi} < \frac{2}{(4k+1)\pi}, \quad -2(\frac{2}{(4k+3)\pi})^2 < 2(\frac{2}{(4k+1)\pi})^2$$

אז ברור ש

$$f(\frac{2}{(4k+3)\pi}) < f(\frac{2}{(4k+1)\pi})$$

כמו כן

$$f(\frac{2}{(4k+4)\pi}) = f(\frac{2}{(4k+4)\pi}) = \frac{2}{(4k+4)\pi} + 2(\frac{2}{(4k+4)\pi})^2 \sin(2k\pi + \frac{4\pi}{2}) = \frac{2}{(4k+4)\pi}$$

כעת נותר להוכיח

$$\frac{2}{(4k+4)\pi} > \frac{2}{(4k+3)\pi} - 2(\frac{2}{(4k+3)\pi})^2$$

עם קצת חישובים:

$$\frac{1}{(4k+4)} > \frac{1}{(4k+3)} - \frac{4}{(4k+3)^2\pi}$$

$$(4k+3)^2\pi > (4k+4)(4k+3)\pi - 4(4k+4)$$

$$\pi(16k^2+24k+9) > \pi(16k^2+28k+12) - 16k - 16$$

$$16k+16 > \pi(4k+3)$$

אכן מתקיים. כלומר, על כל קטע פתוח סביב 0, f היא לא מונוטונית , אבל פונקציה רציפה וחד חד ערכית חייבת להיות מונוטונית ולכן f לא חד חד ערכית ולכן לא הפיכה (בכל סביבה של 0).

3. f לא גזירה ברציפות. הנגזרת של f היא

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 1 + 4x\sin\frac{1}{x} - 2\cos\frac{1}{x} & x \neq 0 \end{cases}$$

וכמובן שהגבול

$$\lim_{x\to 0}(1 + 4x\sin\frac{1}{x} - 2\cos\frac{1}{x})$$

לא קיים. לכן הנגזרת לא רציפה ב 0.

שאלה 3

הפונקציה שלנו היא:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2$$

והאילוץ שלנו הוא:

$$g(x_1,\ldots,x_n) = C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n + D = 0$$

ראשית הגרדיאנט של g הוא

$$\nabla g = (C_1,\ldots,C_n)$$

שזת מטריצה מדרגה 1 ולכן כל נקודת קיצון צריכה לקיים את המשוואות של כופלי לגרנז'
הלגרנז'יאן הוא:

$$L(x_1\ldots,x_n,\lambda) = (x_1-a_1)^2+\ldots+(x_n-a_n)^2+\lambda(C_1x_1+C_2x_2+\ldots+C_nx_n+D) = 0$$

לכן המשוואות הן:

$$2(x_i - a_i) + \lambda C_i = 0$$

$$C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n + D$$

מהמשוואות נקבל ש

$$x_i = -\frac{\lambda C_i}{2} + a_i$$

נציב זאת באילוץ ונקבל

$$-\frac{\lambda C_1C_1}{2} + a_iC_1 - \frac{\lambda C_2C_2}{2} + a_2C_2 - \ldots - \frac{\lambda C_nC_n}{2} + a_nC_n + D = 0$$

אם נסמן $\bar{C} = (C_1,\ldots,C_n)$ אז קיבלנו ש

$$-\lambda\frac{\bar{C}\cdot\bar{C}}{2} + a\cdot\bar{C} + D = 0$$

$$\lambda = \frac{2D + 2a\cdot\bar{C}}{\bar{C}\cdot\bar{C}}$$

ולכן

$$x_i = -\frac{C_i(a\cdot\bar{C} + D)}{\bar{C}\cdot\bar{C}} + a_i$$

כלומר מצאנו את הנקודה

$$(-\frac{C_1(a\cdot\bar{C} + D)}{\bar{C}\cdot\bar{C}} + a_1,\ldots,-\frac{C_n(a\cdot\bar{C} + D)}{\bar{C}\cdot\bar{C}} + a_n)$$

איך יודעים שזו נקודת מינימום? נפעיל שיקול כזה: ניקח כדור סגור שמרכזו ב a עם רדיוס מספיק גדול כך שהוא יחתוך את המישור. החיתוך של המישור עם הכדור היא קבוצה קומפקטית ולכן קיים ל f מינימום עליה. אבל זה יהיה המינימום של f על כל המישור כי כל הנקודות שבחיתוך עם הכדור יותר קרובות לa מאשר הנקודות שמחוצה לו.

כעת נחשב את המרחק:

$$\sqrt{(-\frac{C_1(a\cdot\bar{C}+D)}{\bar{C}\cdot\bar{C}}+a_1-a_1)^2+\ldots+(-\frac{C_n(a\cdot\bar{C}+D)}{\bar{C}\cdot\bar{C}}+a_n-a_n)^2}=$$
$$\sqrt{(\frac{C_1(a\cdot\bar{C}+D)}{\bar{C}\cdot\bar{C}})^2+\ldots+(\frac{C_n(a\cdot\bar{C}+D)}{\bar{C}\cdot\bar{C}})^2}=\sqrt{\frac{(a\cdot\bar{C}+D)^2}{(\bar{C}\cdot\bar{C})^2}(C_1^2+C_2^2+\ldots+C_n^2)}=$$
$$\sqrt{\frac{(a\cdot\bar{C}+D)^2}{(\bar{C}\cdot\bar{C})^2}\bar{C}\cdot\bar{C}}=\frac{a\cdot\bar{C}+D}{\sqrt{\bar{C}\cdot\bar{C}}}$$

או בצורה יותר מפורשת:

$$\frac{a_1C_1+\ldots+a_nC_n+D}{\sqrt{C_1^2+\ldots+C_n^2}}$$

שאלה 4

נסמן את האורך הרוחב והגובה ב x,y,z ואז אנחנו צריכים למצוא מקסימום של

$$f(x,y,z)=xyz$$

תחת האילוץ

$$g(x,y,z)=2xy+2xz+2yz=S$$

הגרדיאנט של g הוא:

$$\nabla g=(2y+2z,2x+2z,2x+2y)$$

היות ו $x,y,z>0$ הגרדיאנט מדרגה 1ואין נקודות חשודות נוספות.

משוואות לגרנז' הן:

$$yz+\lambda(2y+2z)=0$$

$$xz+\lambda(2x+2z)=0$$

$$xy+\lambda(2x+2y)=0$$

נשים לב ש $\lambda\neq 0$כי אז לפחות אחד מתוך x,y,z יהיה 0.

מהמשוואה הראשונה והשניה נקבל

$$(2\lambda+z)y=-2\lambda z$$

$$(2\lambda + z)x = -2\lambda z$$

נשים לב ש $2\lambda + z \neq 0$ כי אם $2\lambda + z = 0$ אז $\lambda = 0$ או $z = 0$ וכבר ראינו שזה לא ייתכן.
לכן נקבל:

$$y = \frac{-2\lambda z}{2\lambda + z} = x$$

כלומר $y = x$ משיקולים דומים קל להראות $y = z$, אם נציב זאת באילוץ נקבל

$$2x^2 + 2x^2 + 2x^2 = 6x^2 = S$$

כלומר

$$x = y = z = \sqrt{\frac{S}{6}}$$

(נשים לב שזאת קוביה). זה מקסימום כי חייב להיות מקסימום כלשהוא, וזה הפתרון היחיד שקיבלנו.

שאלה 5

$$f(x, y, z) = xy + yz$$

תחת האילוצים

$$x^2 + y^2 = 1, \quad y^2 + z^2 = 4$$

מטריצת הנגזרות של האילוצים היא:

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 0 & 2y & 2z \end{pmatrix}$$

מתי לא נקבל דרגה 2? אפשרות אחת היא אם $x = 0$ ו $z = 0$ אבל אין נקודה כזאת שמקיימת את האילוצים. אפשרויות אחרות הן כאשר $y = 0$ ו$x = 0$ או $y = 0$ ו$z = 0$ וגם אין נקודות כאלה שמקיימות את האילוצים. אז בכל נקודה שמעניינת אותנו דרגת המטריצה היא 2 ולכן כל נקודות המינימום ומקסימום יתקבלו בפתרונות של משוואות לגרנז'.
הלגרנז'יאן הוא:

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = xy + yz + \lambda_1(x^2 + y^2 - 1) + \lambda_2(y^2 + z^2 - 4)$$

מערכת המשוואות היא:

$$y + 2\lambda_1 x = 0$$

$$x + z + 2\lambda_1 y + 2\lambda_2 y = 0$$

$$y + 2\lambda_2 z = 0$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$y^2 + z^2 = 4$$

שלושת המשוואות הראשונות הן מערכת לינארית

$$\begin{pmatrix} 2\lambda_1 & 1 & 0 \\ 1 & 2\lambda_1 + 2\lambda_2 & 1 \\ 0 & 1 & 2\lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

אם המטריצה הפיכה אז הפתרון היחיד יהיה $x = y = z = 0$ שהוא כמובן לא מקיים את האילוצים. לכן המטריצה לא הפיכה ונקבל שהדטרמיננטה שלה שווה ל 0.

$$\left| \begin{pmatrix} 2\lambda_1 & 1 & 0 \\ 1 & 2\lambda_1 + 2\lambda_2 & 1 \\ 0 & 1 & 2\lambda_2 \end{pmatrix} \right| = 2\lambda_1 2\lambda_2 (2\lambda_1 + 2\lambda_2) - 2\lambda_2 - 2\lambda_1 = 0$$

כלומר:

$$(4\lambda_1\lambda_2 - 1)(2\lambda_1 + 2\lambda_2) = 0$$

אפשרות ראשונה: $2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$ ואז נקבל מהמשוואה השניה: $x = -z$ אבל אם נחסר אילוץ אחד מהשני נקבל

$$z^2 - x^2 = 3$$

ואם $z = -x$ נקבל $z^2 - x^2 = 0$. סתירה.

לכן בהכרח

$$4\lambda_1\lambda_2 - 1 = 0$$

כלומר:

$$4\lambda_1\lambda_2 = 1$$

מהמשוואה הראשונה

$$y = -2\lambda_1 x$$

מהמשוואה השלישית

$$y = -2\lambda_2 z$$

אם נכפול אותם נקבל:

$$y^2 = 4\lambda_1\lambda_2 xz = xz$$

נציב זאת באילוצים ונקבל:

$$xz + x^2 = 1$$

$$xz + z^2 = 4$$

מהמשוואה הראשונה:

$$z = \frac{1 - x^2}{x}$$

(נשים לב שאם $x = 0$ אז לפי $y^2 = xz$ גם $y = 0$ ואז האילוץ הראשון לא מתקיים).
נציב זאת במשוואה השניה ונקבל

$$1 - x^2 + \frac{1 - 2x^2 + x^4}{x^2} = 4$$

$$x^2 - x^4 + 1 - 2x^2 + x^4 = 4x^2$$

$$5x^2 = 1$$

ולכן

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{5}}$$

ואז

$$z = \pm\sqrt{\frac{16}{5}}$$

ואז

$$y^2 = \frac{4}{5}$$

ולכן הנקודות האפשריות הן:

$$(\sqrt{\frac{1}{5}}, \pm\sqrt{\frac{4}{5}}, \sqrt{\frac{16}{5}}), \quad (-\sqrt{\frac{1}{5}}, \pm\sqrt{\frac{4}{5}}, -\sqrt{\frac{16}{5}})$$

אם נציב נקבל:

$$f(\sqrt{\frac{1}{5}}, \pm\sqrt{\frac{4}{5}}, \sqrt{\frac{16}{5}}) = \pm 2$$

$$f(-\sqrt{\frac{1}{5}}, \pm\sqrt{\frac{4}{5}}, -\sqrt{\frac{16}{5}}) = \mp 2$$

לכן $(\sqrt{\frac{1}{5}}, \sqrt{\frac{4}{5}}, \sqrt{\frac{16}{5}})$ו $(-\sqrt{\frac{1}{5}}, -\sqrt{\frac{4}{5}}, -\sqrt{\frac{16}{5}})$ הם מקסימום ו $(\sqrt{\frac{1}{5}}, -\sqrt{\frac{4}{5}}, \sqrt{\frac{16}{5}})$ ו $(-\sqrt{\frac{1}{5}}, +\sqrt{\frac{4}{5}}, -\sqrt{\frac{16}{5}})$ הם מינימום.

שאלה 6

סדרה של פונקציות רציפות מתכנסת במידה שווה לפונקציה רציפה ולכן f רציפה. ברור ש הגרף של f על הקטע הסגור $[a,b]$ הוא קבוצה בעלת מידה 0.

ראינו הוכחה לכך שהגרף של פונקציה רציפה היא קבוצה בעת מידה 0. נכתוב שוב את ההוכחה עם עדכון טיעון מסוים:

יהי $\epsilon > 0$

היות ו f רציפה על קטע סגורת היא רציפה במ"ש בו. לכן אם נסמן $I = [a,b]$ אז קיים $\delta > 0$ כך ש

$$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2m(I)}$$

ואז בוחרים חלוקה $P = \{I_j\}$ של $[a,b]$ עם $\lambda(P) < \delta$ ואז מסתבר ש

$$P' = \bigcup (I_j \times [\inf_{x \in I_j}(f(x)), \sup_{x \in I_j}(f(x))])$$

היא כיסוי של הגרף ששטחו קטן מ $\frac{\epsilon}{2}$.

היות ו

$$m(P') < \frac{\epsilon}{2}$$

נבחר $t > 0$ כך ש

$$t < \frac{\frac{\epsilon}{2} - m(P')}{2m(I)}$$

ואז נסתכל על הכיסוי:

$$P'' = \bigcup (I_j \times [\inf_{x \in I_j}(f(x)) - t, \sup_{x \in I_j}(f(x)) + t])$$

הוא גם ממידה שקטנה מ $\frac{\epsilon}{2}$. כי

$$m(P'') = m(P') + 2m(I)t < \frac{\epsilon}{2}$$

לכן בכיסוי P'' יש רצועה באורך $t > 0$ סביב f. בגלל ש f_n מתכנסים במידה שווה ל f, החל מ N יתקיים שכל f_n נמצא בתוך הרצועה באורך t ולכן הכיסוי P'' מכסה את

$$A = \{(x, f_n(x)) \mid x \in [a,b], \quad N < n \in \mathbb{N}\}$$

נותרנו עם עוד N פונקציות רציפות על $[a,b]$ וברור שהאיחוד של הגרפים שלהם הוא קבוצה בעלת מידה אפס ולכן קיים להן כיסוי P''' כך ששטחו קטן מ $\frac{\epsilon}{2}$. אם נחבר את הכיסויים

$$P'' \cup P'''$$

אז נקבל כיסוי עבור הקבוצה A הרצויה כך ששטחו קטן מ ϵ.