תירגול 3

9 ביולי 2013

אלגברת מטריצות

בכל התרגיל αמציין סקלאר משדה ו Aמטריצה

פעולות במטריצות

סימון : $M_{m\times n}(\mathbb{F}) = \mathbb{F}^{m\times n}$- אוסף המטריצות בגודל $m\times n$ עם מקדמים משדה $\mathbb{F}$.
עבור מטריצה $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ נסמן את האיבר בשורה ה i ובעמודה ה- j ב -$(A)_{ij} = a_{ij}$.
באופן כללי $(a_{ij})_{i=1,j=1}^{m\ \ n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = A$.

הגדרה 0.1 A, B שתי מטריצות הן שוות אם הן מאותו גודל כלומר $A, B\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. ומתקיים לכל i, j $(A)_{ij} = (B)_{ij}$.

פעולות:

1. חיבור/חיסור
יהיו $A.B\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ אזי החיבור בניהם מוגדר $(A+B)_{ij} := (A)_{ij} + (B)_{ij}$.
לדוגמא $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

2. כפל בסקלאר
יהיו $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F}), \alpha\in\mathbb{F}$ אזי הכפל בניהם מוגדר $(\alpha A)_{ij} = \alpha(A)_{ij}$לדוגמא אזי
$3\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}$.

3. כפל מטריצות
יהיו A, Bמטריצות אזי הכפל שלהם מוגדר אם העמודות של A שווה למספר השורות של B כלומר $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F}),\ B\in M_{n\times p}(\mathbb{F})$ואז הכפל בניהם $AB\in M_{m\times p}(\mathbb{F})$.
איך כופלים?

   (א) כפל שורה עמודה (הגדרה בסיסית)- מציאת המקדם $(AB)_{ij}$
   יהיו $(a_{ij})_{i=1,j=1}^{m\ \ n} = A\in M_{m\times n}(\mathbb{F}),\ (b_{ij})_{i=1,j=1}^{n\ \ p} = B\in M_{n\times p}(\mathbb{F})$ אזי הכפל בניהם מוגדר $(AB)_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$. כלומר המקום i, jשל המטריצה

AB מתקבל ע"י הכפלת השורה ה i של מטריצה A בעמודה j של מטריצה Bבהתאמה.

$$\begin{array}{c} j \\ \begin{pmatrix} * \\ * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \end{pmatrix} \; i \quad .$$

דוגמא $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 2}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}_{3\times 2}$

אזי $AB \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$. נחשב 2 מקדמים

$$(AB)_{11} = 1\cdot(-1) + 5\cdot 1 = 4,\ (AB)_{21} = -2\cdot(-1) + 3\cdot 1 = 5$$

ו $AB = \begin{pmatrix} 4 & * \\ 5 & * \\ * & * \end{pmatrix}_{3\times 2}$

(ב) כפל עמודה עמודה- מציאת עמודה $C_j(AB)$ כסכום משוקלל של עמודות A
יהיו A, B כנ"ל העמודה ה- j של AB היא

$$C_j(AB) = A\cdot C_j(B) = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{a_1} & \vec{a_2} & \cdots & \vec{a_n} \\ | & | & & | \end{pmatrix}_{m\times n} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}_{n\times 1} =$$

$$b_{1j}\vec{a_1} + b_{2j}\vec{a_2} + \cdots + b_{nj}\vec{a_n} = \sum_{k=1}^{n} b_{kj}\vec{a_k} \in \mathbb{F}^{m\times 1}.$$

דוגמא $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$ אזי

$$C_2(AB) = A\cdot C_2(B) = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ -11 \end{pmatrix}$$

ובסה"כ $AB = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 5 & 4 \\ * & -11 \end{pmatrix}$.

(ג) כפל שורה שורה - מציאת שורה $R_i(AB)$ כסכום משוקלל של שורות B.
יהיו A, B כנ"ל השורה ה-i של AB היא:

$$R_i(AB) = R_i(A)\cdot B = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}_{1\times n} \begin{pmatrix} - & \vec{b_1} & - \\ - & \vec{b_2} & - \\ - & \vdots & - \\ - & \vec{b_n} & - \end{pmatrix}_{n\times p} =$$

$$a_{i1}\vec{b_1} + a_{i2}\vec{b_2} + \cdots + a_{in}\vec{b_n} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\vec{b_k} \in \mathbb{F}^{1\times p}$$

דוגמא $B=\begin{pmatrix}-1&1\\1&2\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&5\\-2&3\\3&-7\end{pmatrix}$. אזי

$R_3(AB)=R_3(A)\cdot B=\begin{pmatrix}3&-7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&1\\1&2\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}-1&1\end{pmatrix}+$
$(-7)\begin{pmatrix}1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-7&-14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10&-11\end{pmatrix}$

ובסה"כ $AB=\begin{pmatrix}4&11\\5&4\\-10&-11\end{pmatrix}$

(ד) כפל עמודה שורה- הצגה הכפל כסכום של מטריצות מאותו הגודל.

יהיו A,B כנ"ל הכפל ABניתן להצגה הבאה

$$AB=\begin{pmatrix}|&|&|&|\\\vec{a_1}&\vec{a_2}&\cdots&\vec{a_n}\\|&|&|&|\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-&\vec{b_1}&-\\-&\vec{b_2}&-\\-&\vdots&-\\-&\vec{b_n}&-\end{pmatrix}=.$$

$$\vec{a_1}\vec{b_1}+\vec{a_2}\vec{b_2}+\cdots\vec{a_n}\vec{b_n}\sum_{k=1}^{n}\vec{a_k}\vec{b_k}\in\mathbb{F}^{m\times p}$$

כל אחד מהמחוברים $\vec{a_k}\vec{b_k}\in\mathbb{F}^{m\times p}$ ולכן גם החיבור שלהם.

דוגמא $B=\begin{pmatrix}-1&1\\1&2\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&5\\-2&3\\3&-7\end{pmatrix}$. אזי

$$AB=\begin{pmatrix}1&5\\-2&3\\3&-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1\\1&2\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5\\3\\-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}-1&1\\2&-2\\-3&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&10\\3&6\\-7&-14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&11\\5&4\\-10&-11\end{pmatrix}$$

הערות:

1. התוצאה בכל אחת מדרכי הכפל שווה.
2. הכפל לא קומטטיבי כלומר יתכן $AB\neq BA$

דוגמא $E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$

ו $E_{12}A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $AE_{12}=\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}$

טענה 0.2 תרגיל: הוכח כפל מטריצות אסוטיאטיבי כלומר $(AB)C=A(BC)$בהנחה שהכפל מוגדר.

הוכחה: פתרון $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F}),\ B\in M_{n\times p}(\mathbb{F}),\ C\in M_{p\times l}(\mathbb{F}))$

$((AB)C)_{ij}=\sum_{k=1}^{p}(AB)_{ik}(C)_{kj}=\sum_{k=1}^{p}\sum_{s=1}^{n}(A)_{is}(B)_{sk}(C)_{kj}$). מצד שני

$.(A(BC))_{ij} = \sum_{k=1}^{n}(A)_{ik}(BC)_{kj} = \sum_{k=1}^{n}(A)_{ik}\sum_{s=1}^{p}(B)_{ks}C)_{sj} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{p}(A)_{ik}(B)_{ks}C)_{sj}$

קיבלנו שיוויון. ■

מטריצות ריבועיות

הגדרה 0.3 מטריצה ריבועית היא $.A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$

מטריצות מיוחדות :

1. מטריצת היחידה היא $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. מטריצת האפס היא $0_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3. מטריצה משולשית
   (א) מטריצה משולשית עליונה היא מהצורה $A = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$ כלומר $a_{ij} = 0$ לכל $.j < i$
   (ב) מטריצה משולשית תחתונה היא מהצורה $A = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & \ddots & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix}$ כלומר $a_{ij} =$ 0 לכל $.i < j$
4. מטריצה אלכסונית היא מהצורה $A = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$ כלומר $a_{ij} = 0$ לכל $i \neq j$
.
5. מטריצה סקלארית היא מהצורה $\alpha I_n = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = A$

תרגיל: מטריצה היא משולשית עליונה וגם תחתונה $\leftrightarrow$היא אלכסונית.

הוכחה: ישירות מהגדרה. ■

תרגיל: נגדיר $\mathbb{F}^{n\times 1} \ni e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ובאופן כללי $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $i = e_i$ תהא $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ מטריצה.

חשב את Ae_1, Ae_i.

הוכחה: $\vec{a_1} = 1\vec{a_1} + 0\vec{a_2} + \cdots + 0\vec{a_n} = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ \vec{a_1} & \vec{a_2} & \cdots & \vec{a_n} \\ | & | & | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = Ae_1$

ובאופן דומה $Ae_i = \vec{a_i}$. ■

מסקנה: $AI = A$. הסבר

$$AI = A \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ \vec{e_1} & \vec{e_2} & \cdots & \vec{e_n} \\ | & | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ A\vec{e_1} & A\vec{e_2} & \cdots & A\vec{e_n} \\ | & | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ \vec{a_1} & \vec{a_2} & \cdots & \vec{a_n} \\ | & | & | & | \end{pmatrix} = A$$

באופן דומה ניתן להראות ש $IA = A$.

הגדרה 0.4 מטריצה A תקרא מתחלפת עם B אם $AB = BA$

הוכחה: תרגיל: מטריצה A מתחלפת עם כל מטריצה $\leftrightarrow A$ סקלארית
$(\Rightarrow)$ נתון $A = \alpha I$. תהא B מטריצה נוספת אזי $AB = (\alpha I)B = \alpha(IB) = \alpha(BI) = B(\alpha I) = BA$.$(\Leftarrow)$ נתון A מתחלפת עם כל מטריצה. נגדיר E_{ij} להיות מטריצת אפסים מלבד המקום ה־ij ששווה 1. דוגמא $E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$E_{ij}A = \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} - & 0 & - \\ - & \vec{e_j} & - \\ - & 0 & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - & \vec{r_1} & - \\ - & \vec{r_2} & - \\ - & \vdots & - \\ - & \vec{r_n} & - \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} - & 0 & - \\ - & \vec{r_j} & - \\ - & 0 & - \end{pmatrix}$$

$$AE_{ij} = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ \vec{c_1} & \vec{c_2} & \cdots & \vec{c_n} \\ | & | & | & | \end{pmatrix} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} | & | & | \\ 0 & \vec{e_i} & 0 \\ | & | & | \end{pmatrix} \\ \quad\ j \end{array} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ 0 & 0 & \vec{c_i} & 0 \\ | & | & | & | \end{pmatrix} \\ \quad\quad j \end{array}$$

כיוון שיש שיוויון $\Leftarrow$ כל השורה ה j וכל העמודה ה i שוות לאפס פרט אולי למקום ij שמקיים $(A)_{ii} = (A)_{jj} \Leftarrow A = \alpha I$. ■

סימטריות

הגדרה 0.5 עבור מטריצה $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ מגדירים את המטריצה המוחלפת להיות $(A^t)_{ij} = (A)_{ji}$.

לדוגמא $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}^t$.

תרגיל: יהיו $A,B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ הוכח $(A+B)^t = A^t + B^t$

פתרון: שני המטריצות בשני צידי השיווין מאותו גודל.

נשווה רכיבים. $((A+B)^t)_{ij} = (A+B)_{ji} = (A)_{ji} + (B)_{ji} = (A^t)_{ij} + (B^t)_{ij} = (A^t + B^t)_{ij}$ $\blacksquare$

הגדרה 0.6 מטריצה $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ תקרא סימטרית אם $A^t = A$ ואנטי סימטרית אם $A^t = -A$.

לדוגמא $\begin{pmatrix} 2 & a \\ a & 5 \end{pmatrix}$ סימטרית ו־ $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ אנטי סימטרית.

תרגיל: הוכח שעבור $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ אנטי סימטרית ־ באלכסון יש אפסים.

פתרון: נתון $A^t = -A$ בפרט $(A)_{ii} = -(A)_{ii} \Leftarrow (A)_{ii} = 0$ $\blacksquare$

תרגיל: הוכח שאם $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ אנטי סימטרית וגם סימטרית אזי $A = 0$.

פתרון: $A = A^t = -A$ בפרט לכל ij $(A)_{ij} = -(A)_{ij} \Leftarrow A = 0$ $\blacksquare$

תרגיל: יהיו A,B סימטריות. הוכח AB סימטרית $\Leftrightarrow AB = BA$

הוכחה $(\Leftarrow)$ $AB = (AB)^t = B^tA^t = BA$

$(\Rightarrow)$ $(AB)^t = B^tA^t = BA = AB$ $\blacksquare$.

עקבה של מטריצה

הגדרה 0.7 תהא $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F}) = (a_{ij})_{i=1,j=1}^{m\ \ n}$ מטריצה. העקבה (trace) של A מוגדרת $tr(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}$ כלומר סכום האלכסון הראשי.

תרגיל : עבור $A,B \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ הוכח:

1. $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$.

פתרון: $tr(A+B) = \sum_{k=1}^{n}(a_{kk} + b_{kk}) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} + \sum_{k=1}^{n} b_{kk} = tr(A) + tr(B)$ $\blacksquare$

2. $trace(AB) = trace(BA)$.

פתרון $trac(AB) = \sum_{k=1}^{n}(AB)_{kk} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{kl}b_{lk} = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{lk}a_{kl} = \sum_{l=1}^{n}(BA)_{ll} = trace(BA)$ $\blacksquare$.