לינארית 1 (88112), סמסטר קיץ תשעט, מועד א'

4.9.2019, ד' אלול תשעט

מרצים: מר אחיה בר־און, ד"ר אליהו מצרי, מר אלעד עטייא, ד"ר ארז שיינר
מתרגלים: רועי אבל, ניקול בלשוב, עדי בן־צבי, תמר בר־און, אריאל ויצמן, עוזי חרוש, פולינה לוצקר, אושרית שטוסל.
אורך המבחן: 3 שעות.
חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
הנחיות:

- יש לענות על **כל** 5 השאלות .
- סך הנקודות במבחן הוא 105. ציון מעל 100 יעוגל ל 100.
- יש לענות על **דפי הבחינה** בלבד.
ניתן להשתמש במחברת כטיוטא, אך המחברת **לא תיבדק כלל**.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי־ מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.
- נמקו תשובתכם היכן שנדרש.
- סימונים לאורך הבחינה: עבור מטריצה A, נסמן ב $N(A)$ את מרחב האפס של A, ב $C(A)$ את מרחב העמודות של A, ב $R(A)$ את מרחב השורות של A וב $rank(A)$ את הדרגה של A.

.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!

בהצלחה! ☺

1. (23 נק') תהא $A=\begin{pmatrix}1&4&7&-1&2\\2&5&8&2&1\\3&6&9&5&0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times5}$.

(א) (7 נק') מצאו לאילו ערכי $a\in\mathbb{R}$ מתקיים כי $\begin{pmatrix}a^2\\a\\2-a\end{pmatrix}\in C(A)$.

פתרון: שקול לבדוק מתי יש פתרון למערכת $Ax=\begin{pmatrix}a^2\\a\\2-a\end{pmatrix}$. נדרג את המערכת ונגיע לתשובה:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}1&4&7&-1&2&a^2\\2&5&8&2&1&a\\3&6&9&5&0&2-a\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccccc|c}1&4&7&-1&2&a^2\\0&-3&-6&4&-3&a-2a^2\\0&-6&-12&8&-6&2-a-3a^2\end{array}\right)\to$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}1&4&7&-1&2&a^2\\0&-3&-6&4&-3&a-2a^2\\0&0&0&0&0&2-a-3a^2-2\left(a-2a^2\right)\end{array}\right)$$

ולכן יש פתרון למערכת אמ"מ $2-a-3a^2-2\left(a-2a^2\right)=0$ אמ"מ $(a-1)(a-2)=a^2-3a+2=0$ אמ"מ $a=1,2$

(ב) (7 נק') הוכיחו כי קיימים $a,b\in\mathbb{R}$ יחידים המקיימים כי $\begin{pmatrix}a\\b\\-1\end{pmatrix}\in N(A^t)$ (כאשר A^t היא המטריצה המשוחלפת).

פתרון: מהדירוג של סעיף קודם נקבל כי $rank(A)=2$ ולכן קיימות 2 שורות המהוות בסיס למרחב השורות. בנוסף כיון ששתי השורות של A לא כפולה אחת של השניה אזי הן בת"ל ולכן השורה השלישית תלויה לינארית בהם. כלומר קיימים $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש $R_3(A)=aR_1(A)+bR_2(A)$ בהעברת אגף נקבל כי $aR_1(A)+bR_2(A)-R_3(A)=0$ או בסימונים של כפל מטריצות $A^t\begin{pmatrix}a\\b\\-1\end{pmatrix}=0$ כלומר $\begin{pmatrix}a\\b\\-1\end{pmatrix}\in N(A^t)$. כעת גם $rank(A^t)=rank(A)=2$ ולכן לפי משפט הדרגה (עבור מטריצות) נקבל כי

$$\dim N(A^t)=3-rank(A^t)=1$$

ולכן $\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\-1\end{pmatrix}\right\}$ בסיס ל $N(A^t)$ ובפרט פורשת את $N(A^t)$. ולכן אם $\begin{pmatrix}a'\\b'\\-1\end{pmatrix}\in N(A^t)$ אז קיים α כך ש $\begin{pmatrix}a'\\b'\\-1\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}a\\b\\-1\end{pmatrix}$ מה שגורר ש $\alpha=1$ (לפי קורדינאטה שלישית) ואז $\begin{pmatrix}a'\\b'\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\-1\end{pmatrix}$

(ג) (9 נק') מצאו מטריצות $B\in\mathbb{R}^{3\times2},C\in\mathbb{R}^{2\times5}$ המקיימות $A=BC$ (הערה: ניתן להניח כי a,b מסעיף קודם ידועים).

פתרון: בהמשך לסעיף קודם, נגדיר $C=\begin{pmatrix}-R_1(A)-\\-R_2(A)-\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4&7&-1&2\\2&5&8&2&1\end{pmatrix}$ (שורות ב A שמהוות בסיס למרחב השורות של A) ונגדיר $B=\begin{pmatrix}1&\\&1\\a&b\end{pmatrix}$ (a,b מסעיף קודם) ואז נוכל לחשב

$$BC=\begin{pmatrix}-R_1(A)-\\-R_2(A)-\\-aR_1(A)+bR_2(A)-\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-R_1(A)-\\-R_2(A)-\\-R_3(A)-\end{pmatrix}=A$$

כנדרש.

דף נוסף לשאלה מספר___

דף נוסף לשאלה מספר___

2. (27 נק') תהא $T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}^3$ המוגדרת ע"י משפט ההגדרה להיות ההעתקה הלינארית היחידה המקיימת:

$$T(1+x)=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$
$$T(1-x)=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$
$$T(1+x^2)=\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$$

($\left\{1+x,1-x,1+x^2\right\}$ בסיס ל $\mathbb{R}_2[x]$).

(א) (8 נק') מצאו בסיס ל $\ker T,\mathrm{Im}T$.

פתרון: נגדיר $B=\left\{1+x,1-x,1+x^2\right\},S=\{e_1,e_2,e_3\}$ בסיסים לתחום והטווח בהתאמה (כאשר Sהוא הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$) ואז נקבל כי

$$[T]_S^B=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&0&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}$$

נדרג את המטריצה

$$\begin{pmatrix}1&1&3\\1&0&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&3\\0&-1&-2\\0&-2&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&3\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

מהמשפט $[\ker T]_B=N\left([T]_S^B\right),[\mathrm{Im}T]_S=C\left([T]_S^B\right)$ נקבל כי:

- $$[\ker T]_B=N\left([T]_S^B\right)=\left\{\begin{pmatrix}-t\\-2t\\t\end{pmatrix}\mid t\in\mathbb{R}\right\}=span\left\{\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}$$

  ולכן

  $$\ker T=span\left\{-(1+x)-2(1-x)+\left(1+x^2\right)\right\}=span\left\{-2+x+x^2\right\}$$

  כאשר $\left\{-2+x+x^2\right\}$ בסיס ל $\ker T$

- $$\mathrm{Im}T=[\mathrm{Im}T]_S=C\left([T]_S^B\right)=span\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

  כאשר $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$ בסיס ל $C\left([T]_S^B\right)$ כי בצורה מדורגת של המטריצה יש צירים בעמודות $1,2$ ולכן עמודות $1,2$ של המטריצה מהוות בסיס למרחב העמודות שלה (בנוסף $\mathrm{Im}T=[\mathrm{Im}T]_S$ כי S הבסיס הסטנדרטי).

(ב) (3 נק') האם T הפיכה? הוכיחו את קביעתכם.

פתרון: T אינה הפיכה כי המטריצה המייצת שמצאנו בסעיף קודם אינה הפיכה (בצורה מדורגת שלה יש שורת אפסים).

(ג) (8 נק') מצאו נוסחה מפורשת עבור $T(a+bx+cx^2)$.

פתרון: עבור $a+bx+cx^2 \in \mathbb{R}_2[x]$ כללי נציג אותו כצ"ל של הבסיס הנתון בשאלה. נשתמש בייצוג לפי הבסיס הסטדנטי של $\mathbb{R}_2[x]$ ונדרג את המערכת המתאימה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & -1 & b-a \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a-c \\ 0 & -2 & 0 & b-a+c \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a-c \\ 0 & 1 & 0 & \frac{b-a+c}{-2} \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a-c+\frac{b-a+c}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{b-a+c}{-2} \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{a+b-c}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{b-a+c}{-2} \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array}\right)$$

ולכן

$$\begin{aligned} T(a+bx+cx^2) &= T\left((\frac{a+b-c}{2})(1+x)+(\frac{b-a+c}{-2})(1-x)+c(1+x^2)\right) \\ &= (\frac{a+b-c}{2})T(1+x)+(\frac{b-a+c}{-2})T(1-x)+cT(1+x^2) \\ &= (\frac{a+b-c}{2})\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}+(\frac{b-a+c}{-2})\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+2c \\ \frac{a+b+c}{2} \\ b-c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

.

(ד) (8 נק') מצאו בסיס B ל $\mathbb{R}_2[x]$ ובסיס C ל $\mathbb{R}^3$ כך ש $[T]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

פתרון: נסמן $B=\{b_1,b_2,b_3\}, C=\{c_1,c_2,c_3\}$ בסיסים. מהגדרת מטריצת מייצגת נקבל כי: $[T]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ אמ"מ $Tb_1=c_1, Tb_2=c_2, Tb_3=0$.

נגדיר $\{b_1=1+x, b_2=1-x, b_3=-2+x+x^2\}$(שימו לב כי $b_3 \in \ker T$ ולכן $Tb_3=0$). טענה: זהו בסיס ל $\mathbb{R}_2[x]$
הוכחה: ממשפט השלישי חינם, מספיק לבדוק שהם בת"ל שזה שקול שהייצוג שלהם לפי הבסיס הסטנדרטי בת"ל שזה שקול שהמטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

הפיכה. אכן זהו המצב כי הדט' של מטריצה זאת (פיתוח לפי שורה שלישית) היא $1 \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right| = -2 \neq 0$.

נשים לב כי $c_2 = Tb_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, c_1 = Tb_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ בת"ל (אחד לא כפולה של השני) ולכן נוכל למצוא c_3 כך ש $\{c_1, c_2, c_3\}$ בסיס ל $\mathbb{R}^3$. ביחס לבסיסים אלו, לפי הגדרה נקבל כי

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כמבוקש.

דף נוסף לשאלה מספר___

דף נוסף לשאלה מספר___

3. (18 נק', 9 נק' לסעיף) יהא V מרחב וקטורי ממימד סופי ותהא $T:V\to V$ העתקה לינארית הפיכה.

(א) הוכיחו כי קיימים בסיסים B,C (למרחב V) עבורם $\det\left([T]_C^B\right)=1$
(כלומר, הדטרמיננטה של המטריצה המייצגת $[T]_C^B$ שווה לאחד).

פתרון: נסמן $\dim V=n$ ונבחר $B=\{v_1,\ldots,v_n\}$ בסיס כלשהוא ל V. לכל $1\le i\le n$ נגדיר $c_i=Tv_i$. טענה $c_1,\ldots,c_n$ בת"ל (ואז לפי השלישי חינם $\{c_1,\ldots,c_n\}$ בסיס ל V). הוכחה: יהא $\sum_{i=1}^n \alpha_i Tv_i=0$ צ"ל שמתאפס ונראה כי זהו הצ"ל הטרי'. אכן שיוון זה, כיוון ש T ה"ל הוא $T\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\right)=0$. כיוון ש T הפיכה, נקבל כי $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i=0$ ומכיוון ש B בסיס נקבל כי $\alpha_1=0,\ldots,\alpha_n=0$ כנדרש.

כעת, $[T]_C^B=I$ שהדט' שלה שווה 1.

(ב) **הוכיחו/הפריכו:** בהכרח קיים בסיס B (למרחב V) עבורו $\det\left([T]_B^B\right)=1$.

פתרון: הפרכה. נגדיר $V=\mathbb{R}^n$ ו $T:V\to V$ המוגדרת $Tv=2v$. לכל בסיס B מתקיים כי $[T]_B^B=2I$ ולכן הדט' שווה ל $2^n\neq 1$ (n טבעי!).

דף נוסף לשאלה מספר___

דף נוסף לשאלה מספר___

4. (21 נק', 7 נק' לסעיף) יהא $2 \leq n$ טבעי ותהא $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(א) **הוכיחו/הפריכו:** עבור מטריצת היחידה $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מתקיים כי $N(A-I) \subseteq N(A)$.
פתרון: הפרכה. למשל עבור $A = I$ נקבל כי $N(A-I) = N(0) = \mathbb{R}^n$, $N(A) = \{0\}$.

(ב) **הוכיחו/הפריכו:** אם $A \neq 0$ אז קיימת $B \neq 0$ (מאותו גודל של A) כך ש $N(BA) \neq N(A)$.
פתרון: הוכחה. אם A הפיכה אז $N(A) = \{0\}$. נבחר B להיות מדרגה 1 (למשל מטריצה אפסים פרט למיקום $1,1$ שנגדיר להיות 1) ואז נקבל כי BA לא הפיכה (כי $2 \leq n$ ו $rank(BA) \leq rank(B) = 1$) ולכן $N(BA) \neq \{0\}$.
אם A אינה הפיכה אז גם A^t אינה הפיכה ולכן קיים $v \neq 0$ כך ש $A^t v = 0$. נגדיר B להיות מטריצה שכל שורה שווה ל v ונקבל כי $BA = 0$ (כי $(BA)^t = A^t B^t = (A^t v, \ldots A^t v) = 0$) ולכן $N(BA) = \mathbb{R}^n$ ואילו $N(A) \neq \mathbb{R}^n$ כי $A \neq 0$.

(ג) **הוכיחו/הפריכו:** אם $rank(A) = rank(A^2)$ אז בהכרח $C(A) = C(A^2)$.
פתרון: הוכחה. נניח כי $rank(A) = rank(A^2)$ כלומר $\dim C(A) = \dim C(A^2)$ ונרצה להוכיח כי $C(A) = C(A^2)$. כיוון שהמימדים שווים, מספיק להוכיח הכלה בכיוון אחד. אכן נראה ש $C(A^2) \subseteq C(A)$: יהא $y \in C(A^2)$ אזי קיים x כך ש $y = A^2 x$ ואז $y = A^2 x = A(Ax) \in C(A)$ (כי y מהצורה A כפול וקטור $[Ax]$).

דף נוסף לשאלה מספר___

דף נוסף לשאלה מספר___

5. (16 נק'. 8 נק' לסעיף) תהיינה $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ המקיימות $A-A^t=B+B^t$.

(א) הוכיחו כי A מטריצה סימטרית ו B מטריצת אנטי־סימטרית (כלומר $A=A^t, B=-B^t$).

פתרון: כיוון ש $B+B^t$ סימטרית ($\left(B+B^t\right)^t=B^t+\left(B^t\right)^t=B+B^t$) ו $A-A^t$ אנטי סימטרית (באופן דומה). כיוון שמטריצת האפס היא המטריצה היחידה שהיא גם סימטרית וגם אנטי סימטרית נקבל מהנתון כי $A-A^t=0=B+B^t$. נעביר אגף ונקבל $A=A^t, B=-B^t$ כנדרש.

(ב) הוכיחו כי $\operatorname{adj}(A)$ סימטרית גם כן.

פתרון: לכל מטריצה C ולכל i,j מתקיים כי $\left|M_{j,i}^{C^t}\right|=\left|M_{i,j}^{C}\right|$ הוכחה: שורה i ועמודה j ב C שוות לשורה j ועמודה i ב C^t (בהתאמה) ולכן $M_{j,i}^{C^t}$ היא המטריצה המשוחלפת של $M_{i,j}^{C}$ ולכן יש להם אותה דטר.

כעת, כיוון ש A סימטרית נקבל כי

$$\left[\operatorname{adj}(A)\right]_{j,i}=(-1)^{i+j}\left|M_{i,j}^{A}\right|=(-1)^{i+j}\left|M_{j,i}^{A^t}\right|=\left[\operatorname{adj}(A^t)\right]_{i,j}=\left[\operatorname{adj}(A)\right]_{i,j}$$

כלומר $\operatorname{adj}(A)$ סימטרית.

דף נוסף לשאלה מספר___

דף נוסף לשאלה מספר___