1. הפונקציה e^z

הגדרה

$$e^{x+iy} = e^x$$

תכונות

(א) אם $z = x + 0i$ אז $e^z = e^x cis\left(0\right) = e^x$. ז.א. עבור $z = x$ ממשי e^z חוזרת לפונקציה הקלאסית הממשית e^x, לכן e^z מרחיבה את e^x לתחום המרוכב.

(ב) עבור $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$.

הוכחה: נרשום

$$z_1 = x_1 + iy_1$$

$$z_2 = x_2 + iy_2$$

$$e^{z_1+z_2} = e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} = e^{x_1+x_2} = e^{x_1}e^{x_2}\mathrm{cis}\left(y_1\right)\mathrm{cis}\left(y_2\right) =$$

$$= e^{x_1}\mathrm{cis}\left(y_1\right)e^{x_2}\mathrm{cis}\left(y_2\right) = e^{z_1}e^{z_2}$$

(ג) אם $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $e^{z_1-z_2} = {}^{\mathrm{e}^{z_1}}/_{\mathrm{e}^{z_2}}$.

הוכחה: הטענה שקולה לזאת:

$$e^{z_2} \cdot e^{z_1-z_2} = e^{z_1}$$

אבל לפי (ב)

$$e^{z_2}e^{z_1-z_2} = e^{z_1+z_1-z_2} = e^{z_1}$$

(ד) לכל $z \in \mathbb{C}$, $e^z \neq 0$.

הוכחה:

$$e^z = {}^{1}/_{\mathrm{e}^{-z}} \neq 0$$

או, עבור $z = x + iy$, $e^z = e^x\mathrm{cis}y$.

יש גם תכונות חדשות:

(ה) עבור z מדומה טהור $z=0+iy$,

$$e^{z}=e^{0+iy}=e^{0}\mathrm{cis}\left(y\right)=\mathrm{cis}\left(y\right)$$

ז.א.

$$e^{iy}=\mathrm{cis}y=\mathrm{cos}y+i\mathrm{sin}y$$

זה הזהות של אוילר.

מקרה יפה במיוחד:

$$e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi=-1$$

או

$$e^{i\pi}+1=0$$

הערה

לאור הזהות של אוילר, נוכל להציג מספר מרוכב כלשהו $r\mathrm{cis}\theta$ ע"י $re^{i\theta}$, וכך מקובל ברוב הספרים.

הערה

אויילר הגיע לזהות הנ"ל בעזרת טורי טיילור. כידוע, אם $x\in\mathbb{R}$

$$e^{x}=1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+...$$

נציב $x=i\theta$ לקבל פורמלית

$$e^{i\theta}=1+i\theta+\frac{\left(i\theta\right)^{2}}{2!}+\frac{\left(i\theta\right)^{3}}{3!}+...=1-\frac{\theta^{2}}{2!}+\frac{\theta^{4}}{4!}-\frac{\theta^{6}}{6!}+...+i\left(\theta-\frac{\theta^{3}}{3!}+\frac{\theta^{5}}{5!}+...\right)=\cos\theta+i\sin\theta$$

המשך תכונות

(ו) e^{z} פונקציה מחזורית. בפרט נעיר ש

$$e^{2\pi i}=\mathrm{cis}\left(2\pi\right)=\cos\left(2\pi\right)+i\sin\left(2\pi\right)=1$$

נובע שלכל $z\in\mathbb{C}$,

$$e^{z+2\pi i}=e^{z}e^{2\pi i}=e^{z}\cdot1=e^{z}$$

ולכן יש מחזור $2\pi i$

הכללה: לכל $n\in\mathbb{Z}$, $e^{z+2\pi in}=e^{z}$.

טענה: עבור $z\in\mathbb{C}$ כלשהו, $e^{w}=e^{z}\Leftrightarrow\begin{array}{c}w=z+2\pi in\\ n\in\mathbb{Z}\end{array}$.

הוכחה: כבר הוכחנו שאם $n\in\mathbb{Z}$, $w=z+2\pi in$, אז $e^{w}=e^{z}$. רוצים להוכיח את ההפך.
נניח $e^{\omega}=e^{z}$. נחלק ב־e^{z} לקבל $e^{w-z}=1$. נרשם:

$$w-z=x+iy$$

$$e^{x+iy}=1$$

ז.א.

$$e^{x}\text{cis}y=1$$

בפרט

$$1=|1|=|e^{x}\text{cis}y|=|e^{x}|\,|\text{cis}y|$$

$$1=e^{x}\cdot1=e^{x}$$

$$\Rightarrow x=0$$

לכן

$$\text{cis}y=1$$

$$\cos y+i\sin y=1$$

$$\Rightarrow\begin{array}{c}\sin y=0\\ \cos y=1\end{array}\Leftrightarrow y=2\pi n,n\in\mathbb{Z}$$

בסיכום:

$$e^{w}=e^{z}\Leftrightarrow w-z=x+iy=0+i\left(2\pi n\right)$$

$$w=z+2\pi ni$$

$$\blacksquare$$

2

נגדיר הפכית ל-e^z ע"י $\log z$.[1]

אינטואטאיבית: אם $z = re^{i\theta}$ צפוי לומר

$$\log z = \log\left[re^{i\theta}\right] = \ln r + \log e^{i\theta} = \ln r + i\theta$$

לכן עבור $z = re^{i\theta} \neq 0$ נגדיר

$$\log z = \ln r + i\theta = \ln|z| + i\arg z$$

נבדוק שזאת הפכית ל-e^z. ובכן:

$$e^{\log z} = e^{\ln r + i\theta} = e^{\ln r}e^{i\theta} = re^{i\theta} = z$$

נבדוק ש-$\log z$ אנליטית:

$$\log z = \ln|z| + i\arg z$$

עבור $z = x + iy$

$$\log z = \underbrace{\ln\sqrt{x^2+y^2}}_{u} + \underbrace{i\arctan\left(\frac{y}{x}\right)}_{v}$$

נגזור:

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)$$

$$u_x = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad u_y = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$v(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$v_x = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{-y}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2+y^2} = -u_y$$

$$v_y = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2} = u_x$$

[1] זהו לוג בבסיס הוא e, לא בבסיס 10. פשוט בגלל שזה מרוכב כותבים log, ובממשיים נכתוב ln.

וקיימנו את משוואות קושי רימן.
כיוון שיש נגזרת:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\log z=\frac{\partial}{\partial x}\log z=u_x+iv_x=\frac{x}{x^2+y^2}+i\frac{-y}{x^2+y^2}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{\bar{z}}{z\cdot\bar{z}}={}^1/_z$$

הכל טוב ויפה, אבל התעלמנו מדבר אחד: הגדרנו

$$\log z=\log re^{i\theta}=\ln r+i\theta=\ln|z|+i\arg z$$

אבל $\arg z$ זה לא פונקציה! כי יש אינסוף זוויות מתאימות.
נוכל להגדיר פונקציה אמיתית אם נבחר אחד מ∞ הערכים של $\arg z$ באופן עקבי.
למשל, מגדירים את "הענף" הראשי של $\log z$ ע"י

$$\mathrm{Log}z=\ln|z|+i\mathrm{Arg}z$$

כאשר מוסכם

$$-\pi<\mathrm{Arg}\leq\pi$$

זאת פונקציה מוגדרת היטב לכל $z\neq 0$, אבל היא לא רציפה וכל שכן לא גזירה בקרן השמאלית של ציר הx.
עוד ענף של $\log z$, נתון ע"י

$$\log_1(z)=\ln|z|+i\arg_1(z)$$

כאשר מוסכם

$$0\leq\arg_1(z)<2\pi$$

לפי זה, $\log_1 z$ לא רציפה בקרן הימנית של ציר הx.

תכונות נוספות

(א) $\mathrm{Log}z$ מרחיבה את הפונציה הקלאסית $\ln x$ ($x\in\mathbb{R}$), כי אם $0<z<\mathbb{R}$, $\mathrm{Arg}z=0$ ולכן

$$\log z=\ln|z|+i0=\ln|z|=\ln z$$

(ב) עבור $0\neq z,w\in\mathbb{C}$

$$\log(zw)=\log z+\log w$$

בתור שוויון של קבוצות! כי לכל אגף יש ∞ ערכים, והם שווים.
לגבי כל ענף מסויים, זה לא תמיד נכון, אלא למשל:

$$\mathrm{Log}(zw)=\mathrm{Log}(z)+\mathrm{Log}(w)\mod 2\pi$$

למשל, אם $z=w=-1$

$$\mathrm{Log}\left(z\right)=\ln\left|z\right|+i\mathrm{Arg}z=\ln\left|-1\right|+i\mathrm{Arg}\left(-1\right)=0+i\pi$$

$$\mathrm{Log}\left(w\right)=\mathrm{Log}z=i\pi$$

$$zw=1$$

$$\mathrm{Log}\left(zw\right)=\mathrm{Log}\left(1\right)=0\neq\mathrm{Log}\left(z\right)+\mathrm{Log}\left(w\right)=2\pi i$$

יש שוויון מודולו $2\pi i$.

(ג) עבור $\mathbb{C}\ni z,w\neq0$

$$\log\left(\frac{z}{w}\right)=\log z-\log w$$

בתור שוויון של קבוצות, ו

$$\mathrm{Log}\left(\frac{z}{w}\right)=\mathrm{Log}z-\mathrm{Log}w\mod 2\pi i$$

3 פונקציות טריגונומטריות

נתחיל עם השוויות

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta\qquad\theta\in\mathbb{R}$$

$$e^{-i\theta}=\cos\left(-\theta\right)+i\sin\left(-\theta\right)=\cos\theta-i\sin\theta$$

נחבר משוואות:

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$$

נחסיר משוואות:

$$\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

כל זה עבור $\theta\in\mathbb{R}$
כעת, עבור $z\in\mathbb{C}$ כלשהו נגדיר

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\qquad\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2}$$

הן שלימות כי הן הרכבים של פונקציות שלמות ידועות.
נגזור:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\cos z=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\frac{ie^{iz}-ie^{-iz}}{2}=\frac{-e^{iz}+e^{-iz}}{2i}=-\sin z$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sin z=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sin z=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\frac{ie^{iz}+ie^{-iz}}{2i}=\cos z$$

תכונות נוספות

(א) אם $z\in\mathbb{R}$ נקבל את הפונקציות הטריגונומרטריות הקלאסיות:

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\cos\theta$$

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{iz}}{2i}=\sin\theta$$

לכן הפונקציות הטריגונומטריות המרוכבות מרחיבות את הממשיות.
כל הזהויות הטריגונומטריות הידועות עוברות ל$\mathbb{C}$ ללא שינוי.

(ג) אי שוויונים לא תמיד עוברים ל$\mathbb{C}$. למשל אם $\theta\in\mathbb{R}$ אזי $\begin{matrix}|\cos\theta|\le 1\\ |\sin\theta|\le 1\end{matrix}$ אבל עבור $z\in\mathbb{C}$, $\cos z$ ו$\sin z$ לא חסומות.
למשל: $\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$. ניקח $z=iy, 0<y\in\mathbb{R}$ גדול מאוד, אז

$$\cos\left(iy\right)=\frac{e^{i(iy)}+e^{i(iy)}}{2}=\frac{e^{-y}+e^{y}}{2}$$

כאשר $y\to+\infty$, $e^{iy}\to+\infty$. וכיוון ש $\sin z=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-z\right)$, גם $\sin z$ לא חסומה.

(ג) מגדירים:

$$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z}\qquad\cot z=\frac{\cos z}{\sin z}$$

ע"י גזירה ישירה:

$$(\tan z)'=\frac{1}{\cos^2 z}\qquad(\cot z)'=\frac{-1}{\sin^2 z}$$

4. חזקות

עבור $n \in \mathbb{Z}$ מוגדרים

$$z^n = \underbrace{n \cdot n \cdot n \cdots n}_{n \text{ times}} \qquad z^{-n} = {}^1\!/\!_{z^n}$$

עם נגזרות ידועות.

לכל $z \neq 0$ הפונקציה $\sqrt[n]{z} = z^{1/n}$ מחזירה n ערכים. כדי להגדיר אותה כפונקציה חד־ערכית יש לבחור ענף.

ובכן: פורמלית אם $z = re^{i\theta}$,

$$z^{1/n} = r^{1/n} e^{i\theta/n} = |z|^{1/n} e^{i\frac{\arg z}{n}}$$

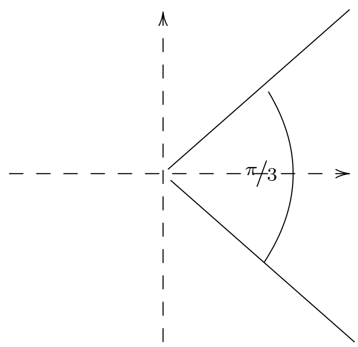
$\arg z$ זה בעייתי, ולכן צריך לבחור ענף. הענף הראשי מוגדר ע"י

$$z^{1/n} = |z|^{1/n} e^{\frac{i\mathrm{Arg} z}{n}}$$

הערכים של הענף הזה כולם בגיזרה

$$-\pi/n < \mathrm{Arg} z \leq \pi/n$$

לדוגמה, לכל $z \in \mathbb{C}$, הענף הראשית של $z^{1/3}$ בגיזרה:



פונקציות הרמוניות

הוכחנו שאם $f = u + iv$ פונקציה גזירה, אז בהכרח $\begin{matrix} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{matrix}$. כעת, נניח שלu ולv יש נגזרות חלקיות רציפות מסדר 2, ונגזור את משוואות קושי־רימן:

$$u_{xx} = v_{yx}$$

$$u_{yy} = -v_{xy} = -v_{yx}$$

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{yx} = 0$$

ז.א., $u = \mathrm{Re} f$ מקיימת את "משוואת לפלס" $u_{xx} = u_{yy} = 0$. פונקציה כזאת נקראת "פונקציה הרמונית"

נעיר שאם $\begin{array}{c} f = u + iv \\ -if = v - iu \end{array}$ אנליטית, לכן $v = \mathrm{Re}(-if)$ הרמונית - $v_{xx} + v_{yy} = 0$

הגדרה

תהי $u(x,y)$ פונקציה הרמונית בתחום $D \subset \mathbb{R}^2$. אומרים שפונקציה הרמונית v צמודה לu בD אם $u + iv$ מרכיב פונקציה אנליטית בD.

דוגמת חישוב

עבור $z = x + iy \in \mathbb{C}$ נגדיר $u(x,y) = x^2 - 3xy^2 + 2x - 5$. התרגיל הוא להוכיח ש$u$ הרמונית ב$\mathbb{R}^2$ ולמצוא לה פונקציה צמודה $v(x,y)$

תשובה

$$u_x = 3x^2 - 3y^2 + 2$$

$$u_{xx} = 6x$$

$$u_y = -6xy$$

$$u_{yy} = -6x$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 6x + (-6x) = 0$$

וu הרמונית ב$\mathbb{R}^2$

לפי ההגדרה, $v(x,y)$ צמודה ל$u(x,y)$ אם $u + iv$ מרכיב פונקציה אנליטית. זאת אומרת אם

$$u_x = v_y \qquad u_y = -v_x$$

בפרט

$$v_x = -u_y = 6xy$$

$$v(x,y)=\int 6xy\,\mathrm{d}x=3x^2y+h(y)$$

כאשר $h(y)$ פונקציה גזירה כלשהי של y.
כעת:

$$v_y=u_x$$

ז.א.

$$3x^2+h(y)=3x^2-3y^y+2$$

$$u_x=3x^2-3y^2+2$$

$$h(y)=\int\left(-3y^2+2\right)\,\mathrm{d}y=-y^3+2y+C$$

לכן

$$v(x,y)=+3x^2y+h(y)=3x^2y-y^3+2y+C$$

וזה אפייני: הפונקציה הצמודה נקבעת באופן יחיד עד כדי תוספת קבוע.

בדיקה

$$f=u+iv=x^3-3xy^2+2x-5+i\left(3x^2y-y^3+2yiC\right)=z^3+2z-5+iC$$

פונקציה שלימה.

דוגמה נוספת

נגדיר

$$u(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}\qquad(x,y)\neq(0,0)$$

$u=\mathrm{Re}(\log z)$ ולכן היא הרמונית ב$\mathbb{C}\setminus\{0\}$.
פונקציה צמודה שתשלים את u לפונקציה אנליטית $u+iv$ היא

$$v(x,y)=\arg z=\arg(x+iy)$$

ידוע שאי אפשר להגדיר את $\arg(x+iy)$ כפונקציה רציפה, כל שכן כפונקציה הרמונית, בתחום $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, ולכן לא קיימת ל$u(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ פונקציה צמודה בתחום $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

אינטגרלים

נגדיר שני סוגי אינטגרלים. הסוג הראשון הוא אינטגרלים מהסוג $\int_a^b z(t)\,\mathrm{d}t$ כאשר $z(t)=x(t)+iy(t)$ פונקציה מרוכבת של משתנה ממשי בקטע $t\in[a,b]$.

אפשר להגדיר את האינטגרל כמו שמגדירים אינטגרל רגיל באינפי 2 ע"י סכומי רימן.
ז.א: נעשה חלוקה P של $[a,b]$

$$a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=b$$

ונבנה סכום רימן על P

$$\sum_{k=1}^{n} z\left(t_k'\right)\Delta t_k$$

כאשר לכל k, $\Delta t_k=t_k-t_{k-1}$ וt_k' נקודה כלשהי בקטע $[t_{k-1},t_k]$. צריך לשים לב - $t_k',\Delta t_k\in\mathbb{R}$ אבל $z\left(t_k'\right)\in\mathbb{C}$.

גם מגדירים $\lambda\left(P\right)=\max\limits_{1\le k\le n}\Delta t_k$.

האינטגרל מוגדר כגבול של סכומי רימן כאשר $\lambda\left(P\right)\to 0$.

אבל

כאשר $z\left(t\right)=x\left(t\right)+iy\left(t\right)$ סכום רימן מקבל צורה "ידועה":

$$\sum_{k=1}^{n} z\left(t_k'\right)\Delta t_k=\sum_{k=1}^{n}\left[x\left(t_k'\right)+iy\left(t_k'\right)\right]\Delta t_k=$$

$$=\sum_{k=1}^{n} x\left(t_k'\right)\Delta t_k+i\sum_{k=1}^{n} y\left(t_k'\right)\Delta t_k\xrightarrow[\lambda(P)\to 0]{}\int_a^b x\left(t\right)\,\mathrm{d}t+i\int_a^b y\left(t\right)\,\mathrm{d}t$$

משפט 1

יהיו $z\left(t\right)$ ו$w\left(t\right)$ מוגדרות ורציפות למקוטעין ב$[a,b)$ ו$c\in\mathbb{C}$ קבוע. אזי:

(א) $\int_a^b\left[z\left(t\right)\pm w\left(t\right)\right]\,\mathrm{d}t=\int_a^b z\left(t\right)\,\mathrm{d}t\pm\int_a^b w\left(t\right)\,\mathrm{d}t$

(ב) $\int_a^b cz\left(t\right)\,\mathrm{d}t=c\int_a^b z\left(t\right)\,\mathrm{d}t$

(ג) $\left|\int_a^b z\left(t\right)\,\mathrm{d}t\right|\le\int_a^b\left|z\left(t\right)\right|\,\mathrm{d}t$

(ד) אם $z'\left(t\right)$ קיימת ורציפה ב$[a,b]$ אז $\int_a^b z'\left(t\right)\,\mathrm{d}t=z\left(b\right)-z\left(a\right)$

(ה) אם $z'\left(t\right)$ קיימת ורציפה ב$[a,b]$, $\int_a^b\left|z'\left(t\right)\right|\,\mathrm{d}t$=אורך המסילה $t\to z\left(t\right)$ בין $t=a$ ל$t=b$