תרגיל בית 6 במבוא לתורת החבורות
סמסטר א' תש"ף

שאלה 1. נתבונן בחבורה $\mathbb{Z}_{24}$.

א. הוכיחו כי $\mathbb{Z}_{24}/6\mathbb{Z}_{24} = \mathbb{Z}_{24}/\langle 6 \rangle \cong \mathbb{Z}_6$ (אין צורך להוכיח את השיוויון, רק את האיזומורפיות, אך אם השיוויון לא ברור לכם, מומלץ להוכיח גם אותו לעצמכם).

ב. למי איזומורפית $(\mathbb{Z}_{24}/6\mathbb{Z}_{24})/(3\mathbb{Z}_{24}/6\mathbb{Z}_{24})$?

שאלה 2. לחבורה $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ יש בדיוק שלוש תת־חבורות מאינדקס 4. מצאו את כולן ובדקו האם חבורות המנה לגביהן הן איזומורפיות.

שאלה 3. תהינה $G_1, \dots, G_n$ חבורות ותהינה $H_1, \dots, H_n$ תת־חבורות נורמליות שלהן בהתאמה (כלומר $H_i \lhd G_i$ לכל i). הוכיחו כי:

א. $H_1 \times \cdots \times H_n \lhd G_1 \times \cdots \times G_n$.

ב. $(G_1 \times \cdots \times G_n) \,/\, (H_1 \times \cdots \times H_n) \cong {}^{G_1}\!/_{H_1} \times \cdots \times {}^{G_n}\!/_{H_n}$.

ג. לכל שתי חבורות חבורות G, H, מתקיים: $\mathrm{Inn}(G \times H) \cong \mathrm{Inn}(G) \times \mathrm{Inn}(H)$.

שאלה 4. נתבונן בחבורה $G = {}^{\mathbb{Q}}\!/_{\mathbb{Z}}$ (מוכרת לכם?).

א. הוכיחו שהסדר של כל איבר ב-G הוא סופי, אבל שישנם איברים בחבורה מסדר גדול כרצוננו.

ב. תהי $H = \left\langle \frac{2}{5} + \mathbb{Z}, \frac{3}{14} + \mathbb{Z} \right\rangle$. הוכיחו כי H היא ציקלית ומצאו את האינדקס $[G : H]$.
רמז: למעשה רוצים למצוא $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ כך ש-$H = \left\langle \frac{a}{b} + \mathbb{Z} \right\rangle$, ולוודא הכלה דו־כיוונית.

שאלה 5. ראינו בתרגיל הקודם את חבורת הארבעה של קליין:

$$V = \{\mathrm{id}, (1\ 2)\,(3\ 4)\,, (1\ 3)\,(2\ 4)\,, (1\ 4)\,(2\ 3)\} \leq S_4$$

א. מצאו סדרה של תתי־חבורות

$$\{\mathrm{id}\} = G_n \lhd G_{n-1} \lhd \cdots \lhd G_1 \lhd G_0 = S_4$$

כך שלכל i מתקיים $G_{i+1} \lhd G_i$, וגם לכל i המנה ${}^{G_i}\!/_{G_{i+1}}$ היא חבורה ציקלית. רמז: העזרו בתת־חבורה נורמלית מוכרת אחרת של S_4.
הערה: סדרות כאלה נקראות סדרות הרכב, ואם המנות ${}^{G_i}\!/_{G_{i+1}}$ בסדרה אכן ציקליות, החבורה נקראת פתירה. זו תכונה חשובה מאוד של חבורה, גם מחוץ למסגרת הקורס.

שאלה 6. הוכיחו כי אם G חבורה פשוטה, H חבורה כלשהי ו- $f : G \to H$ הומומורפיזם לא טריוויאלי, אז f מונומורפיזם.

שאלה 7. תהי G חבורה ותהי $H \lhd G$. הוכיחו כי:

א. אם H ת"ח מקסימלית של G (כלומר: אין $H \leq N \leq G$, אלא אם כן $N = H$ או $N = G$), אז $[G:H]$ סופי וראשוני.

ב. H ת"ח נורמלית מקסימלית של G (כלומר: אין $H \lhd N \lhd G$, אלא אם כן $N = H$ או $N = G$) אם ורק אם אין ל-G/H ת"ח נורמליות לא טריוויאליות.

בהצלחה!