תרגיל בית 7 במבוא לתורת החבורות
סמסטר א׳ תש״ף

שאלה 1. נבחן מתי חבורה ניתנת להצגה כמכפלה ישרה של חבורות ולהיפך.

א. קבעו ונמקו מי מהחבורות הבאות מסדר 54 איזומורפיות זו לזו:

$$\mathbb{Z}_{54}, \mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_{27} \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9$$

ב. בתרגיל בית קודם הוכחתם שחבורת הארבעה של קליין V והחבורה $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ איזומורפיות זו לזו. הוכיחו זאת כעת בפשטות בעזרת מכפלה ישרה פנימית.

ג. קבעו ונמקו האם החבורות S_4 ו-$\mathbb{Z}_2 \times A_4$ איזומורפיות זו לזו?

שאלה 2. תהי G חבורה ותהי $H \leq G$ ת"ח מאינדקס 2. הוכיחו כי או ש-H היא תת החבורה הנורמלית האמיתית היחידה של G (כלומר ת"ח לא טריוויאלית),
או שקיימת $K \lhd G$ מסדר 2, כך ש-$G \cong H \times K$. רמז: משפט האיזומורפיזם השני.

שאלה 3. תהי G חבורה.

א. הוכיחו כי $\operatorname{Inn}(G) \lhd \operatorname{Aut}(G)$ (שזו ת"ח הוכחנו בתרגול). רמז: הראו כי $\varphi \circ \gamma_g \circ \varphi^{-1} = \gamma_{\varphi(g)}$ לאיברים מתאימים.

ב. הוכיחו שאם $Z(G) = \{e\}$, אז $C_{\operatorname{Aut}(G)}(\operatorname{Inn}(G)) = \{\mathrm{id}\}$ ובפרט מתקיים $Z(\operatorname{Aut}(G)) = \{\mathrm{id}\}$.

שאלה 4. תהי $\sigma \in S_n$ תמורה, ויהי מחזור $a = (a_1, a_2, \ldots, a_k) \in S_n$. הוכיחו את הטענה השימושית שראינו בתרגול:

$$\sigma a \sigma^{-1} = \sigma\left(a_1, a_2, \ldots, a_k\right)\sigma^{-1} = \left(\sigma\left(a_1\right), \sigma\left(a_2\right), \ldots, \sigma\left(a_k\right)\right)$$

למשל, עבור $\sigma = (1\ 2)(4\ 5)$ ו-$a = (2\ 3\ 5\ 6)$ נקבל

$$\sigma\,(2\ 3\ 5\ 6)\,\sigma^{-1} = (1\ 3\ 4\ 6)$$

רשות: נסו למצוא נוסחה עבור $\sigma a \sigma^{-1}$ כאשר a היא תמורה כלשהי.

שאלה 5. נתבונן ב-S_n עבור $n > 2$. הוכיחו כי:

א. לכל מחזור $\mathrm{id} \neq \tau \in S_n$ קיימת תמורה $\sigma \in S_n$ כך ש-$\sigma\tau \neq \tau\sigma$. רמז: העזרו בשאלה הקודמת.

ב. החבורה S_n חסרת מֶרְכָּז, כלומר: $Z(S_n) = \{\mathrm{id}\}$

ג. $\operatorname{Inn}(S_n) \cong S_n$.

ד. (רשות) מצאו אוטומורפיזם **לא** פנימי של החבורה $S_3 \times S_3$. רמז: נוח לחשוב על $S_3 \times S_3$ כתת־חבורה של S_6 ושם לחפש אוטומורפיזם.

שאלה 6. הוכיחו כי:

א. לכל חבורה G, אם מחלקת הצמידות של $x \in G$ היא $\{a_1, ..., a_k\}$, אז מחלקת הצמידות של x^{-1} היא $\{a_1^{-1}, ..., a_k^{-1}\}$.

ב. כל תמורה $\sigma \in S_n$ צמודה לתמורה ההופכית לה.

ג. לכל מחזור $\sigma \in S_n$ שאורכו n, המְרַכֵּז שלו הוא $< \sigma >$ (תזכורת: מְרַכֵּז של איבר בחבורה הוא קבוצת האיברים בחבורה שמתחלפים איתו).

שאלה 7. תהי G חבורה. הוכיחו כי לכל $a \in G$ ולכל $n \in \mathbb{Z}$ מתקיים: $C_G(a) \leq C_G(a^n)$.

שאלה 8. (רשות) שאלה לא קשה אך דורשת קצת קומבינטוריקה.

א. מצאו כמה איברים מסדר 6 יש בחבורה S_6.

ב. מצאו כמה איברים מסדר 2 יש בחבורה S_6.

שאלה 9. (רשות) תהי $\sigma \in S_n$ תמורה, ונגדיר את התומך של σ להיות

$$\mathrm{supp}(\sigma) = \{i \,|\, \sigma(i) \neq i\}$$

במילים אחרות, אלו הם המספרים ש-σ "מזיזה". נאמר ששתי תמורות σ ו-τ הן זרות אם

$$\mathrm{supp}(\sigma) \cap \mathrm{supp}(\tau) = \varnothing$$

הוכיחו כי אם שני מחזורים שאינם זרים מתחלפים זה עם זה, אז כל אחד מהם הוא חזקה של השני.

הדרכה: יהיו σ, τ שני מחזורים מתחלפים שאינם זרים. ראשית הראו כי $\mathrm{supp}(\sigma) = \mathrm{supp}(\tau)$. אפשר להניח ש-$\sigma = (1\ 2\ \ldots\ n)$, ו-$\tau(1) = 1 + k$. הראו כי $\tau = \sigma^k$.

שאלה 10. (רשות) תהינה תמורות $\sigma, \tau \in S_n$. הוכיחו שאם

$$|\mathrm{supp}(\sigma) \cap \mathrm{supp}(\tau)| = 1$$

אז הקומוטטור $[\sigma, \tau] = \sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}$ הוא מחזור מאורך 3.
רמז: הראו כי $\mathrm{supp}(\sigma^{-1}) = \mathrm{supp}(\sigma)$ לכל תמורה ובדקו לאן נשלח המספר ששייך לחיתוך התומכים.

בהצלחה!