הרצאה 21

חוג חילופי R, אידיאל $I \triangleleft R$ כך ש- $\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n = (0)$.

הוגדר מבנה טופולוגי על R (הטופ' ה-I-אדית).

$U \subseteq R$ פתוחה $\iff$ לכל $x \in U$ קיים $n \geq 1$ כך ש- $x + I^n \subseteq U$.

הגדרנו

$$\hat{R} = \varprojlim_{n} R/I^n$$

$$= \{(a_1 + I,\ a_2 + I^2,\ a_3 + I^3, \dots) \mid a_n \in R,\ a_n - a_m \in I^m \text{ לכל } m \leq n\}$$

$$\hat{I} = \{(a_1 + I, \dots) \mid a_n \in I\} \triangleleft \hat{R}$$

<u>הוכחנו:</u> אם R נתרי, אזי $\hat{R}$ שלם בטופולוגיה ה-$\hat{I}$-אדית.

$$\hat{R}/\hat{I}^n \cong R/I^n \quad \text{לכל } n \in \mathbb{N}.$$

<u>הגדרנו:</u> R חוג חילופי. הרדיקל של ג'ייקובסון של R הינו החיתוך של כל האידיאלים המקסימליים. מסמנים $J(R)$.

<u>הוכחנו:</u> יהי $r \in R$. אזי $r \in J(R) \iff 1 - rx$ הפיך לכל $x \in R$.

טענה R חילופי נתרי, $I \lhd R$ אידאל כנ"ל.

אז $\hat{I} \subseteq J(\hat{R})$.

הוכחה יהי $r \in \hat{I}$. צריך להוכיח כי $1-\underbrace{rx}_{\in \hat{I}}$

הפיך לכל $x \in \hat{R}$. מספיק להוכיח כי $1-r$

הפיך לכל $r \in \hat{I}$. אז הסדרה

$$1+r,\ 1+r+r^2,\ 1+r+r^2+r^3,\ \ldots$$

הינה סדרת קושי. $\hat{R}$ שלם $\Leftarrow$ לסדרה של גבול

L. אז

$$(1-r)(1+r) = 1-r^2$$
$$(1-r)(1+r+r^2) = 1-r^3$$
$$(1-r)(1+r+r^2+r^3) = 1-r^4$$
$$\searrow$$
$$1 = (1-r)L$$

לכן $1-r$ הפיך.

מסקנה R חילופי נתרי, $I \lhd R$ אידאל מקסימלי

כך ש- $\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n = (0)$. אז $\hat{I}$ הינו האידאל

המקסימלי היחיד של $\hat{R}$.

(כלומר, $\hat{I} \lhd \hat{R}$ מקסימלי ואין ל-$\hat{R}$ אידאלים מקסימלים אחרים).

<u>הוכחה</u> לפי הטענה מן השבוע הקודם,

$$\hat{R}/\hat{I} \simeq \underbrace{R/I}_{\text{שדה, כי } I \lhd R \text{ מקסימלי}} \Rightarrow \hat{I} \text{ מקסימלי ב-} \hat{R}.$$

לפי הטענה הקודמת, $\hat{I} \subseteq J(\hat{R})$. זה אומר כי $\hat{I}$ מוכל בכל אידאל מקסימלי אחר. $\hat{I}$ מקסימלי, לכן שווה לכל אידאל מקסימלי אחר.

<u>מסקנה</u> תחת ההנחות של המובאה הקודמת, $\hat{R}$ הינו חוג מקומי.

<u>הגדרה</u> חוג חילופי R נקרא מקומי אם הוא מקיים אחד מן התנאים השקולים הבאים:

א) ל-R יש רק אידאל מקסימלי אחד.

ב) לכל $x \in R$, לפחות אחד מן האיברים x, $1-x$ הפיך.

ג) אם $x, y \in R$ לא הפיכים, אזי $x+y$ לא הפיך.

ד) אם $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ הפיך, אזי אחד מן המחוברים x_i הפיך.

נוכיח שהתנאים הנ"ל אכן שקולים:

א) ⇐ ג) נניח שיש אידיאל מקסימלי יחיד M. יהיו $x,y\in R$ לא הפיכים. אזי האידיאלים xR, yR אמיתיים. לפי משפט מתרגול הקודם, כל אידיאל אמיתי מוכל באידיאל מקסימלי! לכן $x\in xR\subseteq M$, וכמו כן $y\in M$ לכן $x+y\in M$. לכן $x+y$ לא הפיך.

הערה אם M הינו האידיאל המקס' היחיד של R, אזי

$x\in M \iff x$ לא הפיך

$x\notin M \iff x$ הפיך

ג) ⇐ ב) אינדוקציה פשוטה על n.

ב) ⇐ א) $1=x+(1-x)$ הפיך, לכן x או $1-x$ הפיך

ב) ⇐ א) נניח בשלילה שיש שני אידיאלים מקס' שונים, M_1, M_2. אזי $M_1+M_2=R$ לכן $1=x+y$ עבור $x\in M_1$, $y\in M_2$ מתאימים. אך $x, y=1-x$ שניהם לא הפיכים, כי מוכלים באידיאלים מקסימליים, בסתירה לב).

שאלה מדוע חוגים מקומיים נקראים מקומיים?

דוגמא יהי X מרחב טופולוגי. יהי

$$C(X,\mathbb{R})=\{f: X\to\mathbb{R}\ \text{פונקציה רציפה}\}$$

זה חוג. $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, $(fg)(x)=f(x)\cdot g(x)$

נג׳ $x\in X$ נקודה. מגדירים יחס שקילות על

$C(X,\mathbb{R})$: $f\sim g$ אם קיימת סביבה פתוחה

U של x כך ש- $f(u)=g(u)$ לכל $u\in U$.

$$R_x = \left\{ \begin{matrix} \text{פונקציות רציפות} \\ f: U_f \to \mathbb{R} \\ \text{מוגדרות על סביבה} \\ U_f \ni x \end{matrix} \right\} \Big/ \sim$$

כלומר האיברים של R_{x_0} הם מחלקות שקילות.

R_{x_0} הינו חוג. המחלקות נקראות נבטים (germ) של

פונקציות ב- x_0.

החוג R_{x_0} הוא מקומי.

$$I = \{ [f] : f(x_0) = 0 \} \triangleleft R_{x_0}$$

אידאל אמיתי. אם $[f]\notin I$, אזי $f(x_0)\neq 0$.

f רציפה $\Leftarrow$ יש סביבה פתוחה $U\ni x_0$ שם f

לא מתאפסת, $|f(u)|\geq c>0$ לכל $u\in U$. אזי

$\frac{1}{f}$ מוגדרת ורציפה ב- U $\Leftarrow$ $[f]$ הפיכה.

לכן R_{x_0} חוג מקומי!

נחזור להשלמות $\hat{R} = \varprojlim R/I^n$ כאשר R נתרי,

I מקסימלי, $\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n = (0)$ אז $\hat{R}$ חוג מקומי!

נתבונן בשני מקרים פרטיים:

1) $R = F[x]$, כאשר F שדה, יהי $I = (x)$.

$I = \{$כל הפולינומים ללא איבר חפשי$\}$ $\quad R/I \cong F \Rightarrow I \triangleleft R$ מקסימלי!

מה זה $\hat{R}$? נשים לב שלכל $n \in \mathbb{N}$

המחלקות ב- $R/I^n = F[x]/(x^n)$ הן

$$\left\{ f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n F[x] \;\middle|\; a_0,\dots,a_{n-1} \text{ נתונים} \right\}$$

האיברים של $\hat{R}$ הם

$$\left\{ f_1 + (x),\ f_2 + (x^2),\ f_3 + (x^3), \dots \;\middle|\; \text{לכל } n \le m,\ m \text{ המקדמים הראשונים של } f_n \text{ שווים לאלה של } f_m \right\}$$

זה אומר שהסדרה היא מן הצורה

$a_0 + (x)$

$a_0 + a_1 x + (x^2)$

$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + (x^3)$ ...

לכן האיברים הם טורי חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,

לכן $\hat{R} = F[[x]]$.

$$\hat{I} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \mid a_0 = 0 \right\}.$$

נבחין ישירות שאם $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \notin \hat{I}$, כלומר $a_0 \neq 0$,

אזי הטור הזה הפיך, נבנה טור אחר כך ש-

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = 1$$

נגדיר רקורסיבית את המקדמים b_n.

$a_0 b_0 = 1 \Rightarrow b_0 = a_0^{-1}$. (קיים כי המקדמים חיים בשדה F)

$a_1 b_0 + a_0 b_1 = 0 \Rightarrow b_1 = -a_0^{-1} a_1 b_0$

באינדוקציה

$$b_n = -a_0^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k} b_k$$

לכן כל איבר מחוץ ב-$\hat{I}$ הפיך, לכן $\hat{I}$ הוא האידאל המקסימלי היחיד של $\hat{R} = F[[x]]$

יהי $\alpha=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in \hat{R}$ טור חזקות. יהי $\alpha \neq 0$,

אזי יהי n מינימלי כך ש-$a_n \neq 0$. ($\alpha \notin \hat{I}^n$) אזי

$$\alpha = x^n \left(\underbrace{a_n + a_{n+1}x + \dots}_{\text{הפיך}} \right)$$

זה אומר: ניתן להציג כל איבר $\alpha \in \hat{R} = F[[x]]$

בצורה $\alpha = x^n u$ כאשר $n \geq 0$, u הפיך.

<u>מסקנה</u> יהי $J \trianglelefteq F[[x]]$ אידאל לא אפס.

אזי קיים $m \in \mathbb{N}$ כך ש-$J = \hat{I}^m = (x^m)$.

<u>הוכחה</u> לכל $0 \neq \alpha \in F[[x]]$ נסמן

$v(\alpha) = \min\{n : a_n \neq 0\}$.

אם $J \neq (0)$, יהי $m = \min\{v(\alpha) : \alpha \in J\}$

אזי נטען כי $J = \hat{I}^m$. אכן:

יש ב-J איבר α אשר $v(\alpha)=m$ $\Leftarrow$

$\alpha = x^m u$ עבור u הפיך $\Leftarrow$

$$J \supseteq (\alpha) = (x^m) = \hat{I}^m .$$

יהי $\alpha \in J$ כלשהו, אזי $\alpha = x^n u$ כאשר u הפיך $n \geq m$

$$\alpha = x^m (x^{n-m} u) \in (x^m)$$

לכן $J \subseteq \hat{I}^m$.

~~מסיקה~~ מבנה האידיאלים של $F[[x]]$ פשוט מאוד:

$$\hat{I} \supseteq \hat{I}^2 \supseteq \hat{I}^3 \supseteq \dots \qquad \supseteq (0).$$

---

2) $R = \mathbb{Z}$ p ראשוני, $I = p\mathbb{Z}$ מקסימלי.

$$\hat{R} = \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_p$$ החוג של השלמים ה-p-אדיים

הוא הסדרות

$$\left\{ (a_1 + p\mathbb{Z}, a_2 + p^2\mathbb{Z}, a_3 + p^3\mathbb{Z}, \dots) \;\middle|\; \text{לכל } m \leq n, \; a_m \equiv a_n \bmod p^m \right\}.$$

הוגדר על ידי K. Hensel בשנת 1905.

<u>תרגיל</u>: לכל $0\neq\alpha\in\mathbb{Z}_p$, יהי

$$v(\alpha)=\min\{n : a_n+p^n\mathbb{Z}\neq 0+p^n\mathbb{Z}\}$$

אזי $\alpha=p^n u$, u הפיך.

לכן האידאלים של $\mathbb{Z}_p$ הינן

$$p\mathbb{Z}_p \supsetneq p^2\mathbb{Z}_p \supsetneq p^3\mathbb{Z}_p \supsetneq \cdots \supsetneq (0)$$

<u>שאלה</u> מוטיבציה ל-$\mathbb{Z}_p$? רוצים חוג מקומי מעין $\mathbb{Z}$.

כל חוג $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ מקומי, אבל לא ניתן לשכן את $\mathbb{Z}$ בו. אבל ב-

$$\mathbb{Z}_p=\varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$$

ניתן לשכן את $\mathbb{Z}$.

<u>שאלה</u> למה להגביל כל כך?

ניקח את המיקום $S^{-1}R$

כאשר $R = \mathbb{Z}$

$S = \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}$

$$S^{-1}R = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \;\middle|\; \text{שברים מצומצמים, } p \nmid b \right\}$$

<u>תרגיל פשוט:</u> $S^{-1}R$ מקומי, האידיאל המקסימלי היחיד הוא $\left(\frac{p}{1}\right)$.

$\mathbb{Z} \hookrightarrow S^{-1}R$

$n \mapsto \frac{n}{1}$.

מצאנו חוג מקומי שמכיל $\mathbb{Z}$, הוא פשוט יותר מ-$\mathbb{Z}_p$. מדוע $\mathbb{Z}_p$ טוב יותר?