מבנים דיסקרטיים – תרגיל 2

שאלה 1

א. יהי $n \in \mathbb{N}$. נגדיר את $O_n(\mathbb{R})$ להיות קבוצת המטריצות האורתוגונליות בגודל $n \times n$, כלומר $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid AA^T = I\}$ (באשר A^T היא השחלוף של A). הוכיחו כי $O_n(\mathbb{R})$ חבורה ביחס לכפל מטריצות. הראו כי $O_3(\mathbb{R})$ לא אבלית.

ב. נגדיר $T = \{z \in \mathbb{C} :\ |z| = 1\}$. הוכיחו כי $(T,\ \cdot\ )$ היא חבורה קומוטטיבית (הכפל ב-T הוא כפל של מספרים מרוכבים).

ג. מצאו איבר מסדר 4 ב-T.

פתרון

סעיף א: נוכיח כי $O_n(\mathbb{R})$ חבורה.

<u>נראה סגירות:</u> תהיינה $A, B \in O_n(\mathbb{R})$. אזי $AA^T = BB^T = I$. לכן, $(AB)(AB)^T = (AB)(B^TA^T) = A(BB^T)A^T = AIA^T = AA^T = I$, כלומר $AB \in O_n(\mathbb{R})$.

<u>נראה אסוציאטיביות:</u> אסוציאטיביות מתקיימת כי כפל מטריצות הוא אסוציאטיבי.

<u>נראה קיום יחידה:</u> $I \in O_n(\mathbb{R})$ כי $I \cdot I^T = I$. בנוסף, לכל מטריצה $A \in O_n(\mathbb{R})$ מתקיים $AI = IA = A$ ולכן I יחידה של $O_n(\mathbb{R})$.

<u>נראה קיום הופכיים:</u> תהי $A \in O_n(\mathbb{R})$. אזי $AA^T = I$. זה אומר <u>ש-A הפיכה כמטריצה</u> ו-$A^{-1} = A^T$. אם נוכיח ש-$A^{-1} = A^T \in O_n(\mathbb{R})$ נקבל <u>ש-A הפיכה ב-$O_n(\mathbb{R})$</u>. באמת, $(A^T)(A^T)^T = A^TA = (A^{-1}A)A^TA = A^{-1}(AA^T)A = A^{-1}IA = I$. לכן, $A^{-1} = A^T \in O_n(\mathbb{R})$.

<u>נראה ש-$O_3(\mathbb{R})$ לא אבלית:</u> נגדיר $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. אזי $AA^T = BB^T = I$ ולכן $A, B \in O_3(\mathbb{R})$. מתקיים $BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = AB$ ולכן $O_3(\mathbb{R})$ לא אבלית.

סעיף ב: <u>נוכיח כי $(T, \cdot)$ חבורה אבלית.</u>

<u>הערה:</u> בהוכחה נשתמש בעובדה הידועה הבאה: לכל $z, w \in \mathbb{C}$ מתקיים $|zw| = |z| \cdot |w|$.

<u>נראה סגירות:</u> יהיו $z, w \in T$. אזי $|zw| = |z| \cdot |w| = 1 \cdot 1 = 1$ ולכן $zw \in T$.

<u>נראה אסוציאטיביות:</u> כפל מספרים מרוכבים הוא אסוציאטיבי ולכן מתקיימת אסוציאיטיביות.

<u>נראה קיום יחידה:</u> $1 \in T$ כי $|1| = 1$. בנוסף, לכל $z \in T$ מתקיים $z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$. לכן 1 יחידה של T.

<u>נראה קיום הופכיים:</u> יהי $z \in T$. אזי $z \neq 0$ (אחרת, נקבל $0 = |0| = |z| = 1$ וזו סתירה). לכן, קיים $w \in \mathbb{C}$ כך ש-$1 = zw = wz$. מתקיים $1 = |1| = |wz| = |w|\ \cdot |z| = |w| \cdot 1 = |w|$ ולכן $w \in T$. זה אומר ש-$w \in T$ ולכן קיבלנו ש-w הופכי של z ב-T.

<u>נראה אבליות:</u> כפל מספרים מרוכבים הוא חילופי ולכן חילופיות מתקיימת.

סעיף ג: מתקיים $|i| = 1$ ולכן $i \in T$. בנוסף, $i^2 = -1,\ \ i^3 = -i,\ \ i^4 - 1$. כלומר, $i, i^2, i^3 \neq 1$ ו-$i^4 = 1$. זה אומר ש-$o(i) = 4$.

שאלה 2

יהי $(M,\cdot)$ מונויד.

א. הראו כי אם M <u>חילופי</u> אז לכל $a,b\in M$ ו-$n\in\mathbb{N}$ מתקיים $(ab)^n=a^nb^n$. [המלצה: אינדוקציה על n.]
ב. מצאו דוגמא למונויד לא קומוטטיבי עבורו סעיף א לא נכון. [רמז: S_3.]

יהי $k\in\mathbb{N}$. נגדיר $N=\{g^k \mid g\in M\}$.

ג. הראו כי אם M אבלי, אז $(N,\cdot)$ גם מונויד אבלי. [העזרו בסעיף א.]
ד. מצאו דוגמא למונויד לא קומוטטיבי M ו-$k\in\mathbb{N}$ כך ש-$(N,\cdot)$ לא מונויד. איזו מהתכונות של מונויד לא מתקיימת עבור $(N,\cdot)$?
ה. הוכיחו או הפריכו: אם M חבורה חילופית אז $(N,\cdot)$ חבורה אבלית.

פיתרון

סעיף א: יהיו $a,b\in M$. נוכיח באינדוקציה ש-$(ab)^n=a^nb^n$. ל-$n=1$ זה ברור. נניח שזה נכון עבור $n-1$, אזי $(ab)^n=(ab)^{n-1}(ab)=a^{n-1}b^{n-1}ab=a^{n-1}ab^{n-1}b=a^nb^n$, כדרוש. [בשוויון האדום השתמשנו בהנחת האינדוקציה. בשוויון הכחול השתמשנו בחילופיות.]

סעיף ב: <u>דוגמא:</u> נבחר $M=S_3$, $a=(1,2)$, $b=(2,3)$ ונראה ש-$(ab)^2\neq a^2b^2$. באמת: $a^2b^2=(1,2)^2(2,3)^2=id\cdot id=id$ ומצד שני $ab=(1,2)(2,3)=(1,2,3)$ ולכן $(ab)^2=(1,3,2)\neq id=a^2b^2$. [כמובן שלא ייתכן ש-$S_3$ כי אחרת מה שהראינו סותר את סעיף א.]

<u>דוגמא אחרת:</u> נבחר $M=O_3(\mathbb{R})$ המטריצות A,B שבהן השתמשנו בסעיף א של שאלה 1 מקיימות $A^2B^2\neq(AB)^2$.

סעיף ג: <u>נראה סגירות:</u> יהיו $x,y\in N$. אזי קיימים $a,b\in M$ כך ש-$a^k=x, b^k=y$. היות ו-M אבלי, אז לפי סעיף א, $xy=a^nb^n=(ab)^n\in N$. לכן $xy\in N$.
<u>נראה אסוציאטיביות:</u> הכפל על M אסוציאטיבי כי M מונויד. לכן גם הכפל על N אסוציאיטיבי.
<u>נראה קיום יחידה:</u> מתקיים $e=e^k\in N$. היות ו-e יחידה של M אז לכל $x\in N$ מתקיים $ex=xe=x$ ולכן e יחידה של N.
<u>נראה אבליות:</u> יהיו $x,y\in N$. אזי M אבלי ולכן $xy=yx$.
<u>לסיכום:</u> נובע ש-$(N,\cdot)$ מונויד חילופי.

סעיף ד: נבחר את $M=S_3$ ואת $k=3$. אזי
$N=\{id^3,(1,2)^3,(2,3)^3,(3,1)^3,(1,2,3)^3,(3,2,1)^3\}=\{id,(1,2),(2,3),(3,1),id,id\}=\{id,(1,2),(2,3),(3,1)\}$. [הערה: $(1,2)^2=id$ ולכן $(1,2)^3=(1,2)^2(1,2)=(1,2)$.]
$(N,\cdot)$ אינו מונויד כי לא מתקיימת סגירות. לדוגמא, $(1,2),(2,3)\in N$ אבל $(1,2)(2,3)=(1,2,3)\notin N$. [אסוציאטיביות ויחידה כן מתקיימות.]

סעיף ה: הטענה נכונה!
הוכחה: בסעיף ג הראינו ש-$(N,\cdot)$ מונויד לכן נותר לבדוק <u>שלכל איבר יש הופכי</u>: יהי $x\in N$. אזי קיים $a\in M$ כך ש-$a^k=x$. היות ו-M חבורה קיים ל-a הופכי, a^{-1}. מתקיים $a^{-k}=(a^{-1})^k\in N$, ובנוסף, $e=a^0=a^{k+(-k)}=a^ka^{-k}=xa^{-k}$. באותו אופן $a^{-k}x=e$. לכן a^{-k} הופכי של x ב-N. מש"ל.

שאלה 3

נתונות התמורות הבאות ב-S_7: $\sigma = (5,6)(1,3,4)$, $\tau = (1,2,4)(6,7,3)$.

א. חשבו את $\sigma\tau$, $\tau\sigma$, $\tau^{-2}\sigma^{-1}$. כתבו את התשובות ב-2 דרכים: בייצוג ע"י טבלה ובייצוג ע"י מכפלה של מחזורים זרים.

ב. חשבו את הסדר של σ ו-τ.

ג. תנו דוגמא לאיבר מסדר 10 ב-S_7.

פיתרון

סעיף א:

$$\sigma\tau = (1,2)(3,5,6,7,4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\tau\sigma = (1,6,5,7,3)(2,4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 4 & 1 & 2 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

נחשב את $\tau^{-2}\sigma^{-1}$ ע"י מספר חישובי ביניים:

$$\sigma^{-1} = (1,3,4)^{-1}(5,6)^{-1} = (4,3,1)(6,5)$$

$$\tau^{-1} = (6,7,3)^{-1}(1,2,4)^{-1} = (3,7,6)(4,2,1)$$

$\tau^{-2} = (\tau^{-1})^2 = (3,7,6)^2(4,2,1)^2 = (3,6,7)(4,1,2)$ [שימו לב: השוויון האדום נכון מפני ש-$(3,6,7),(4,1,2)$ מתחלפים. הם מתחלפים כי אלה מחזורים זרים, כלומר $\{3,6,7\} \cap \{4,1,2\} = \phi$.]

$$\tau^{-2}\sigma^{-1} = \big((3,6,7)(4,1,2)\big)\big((4,3,1)(6,5)\big) = (2,4,6,5,7,3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 2 & 6 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

סעיף ב: היות ומחזורים זרים מתחלפים, $\sigma^k = (5,6)^k(1,3,4)^k$ ו-$\tau^k = (1,2,4)^k(6,7,3)^k$. בנוסף, $(5,6)^2 = (1,3,4)^3 = (1,2,4)^3 = (6,7,3)^3 = id$ (כי הסדר של מחזור הוא האורך שלו). לכן:

$$\sigma = (5,6)(1,3,4) \neq id$$
$$\sigma^2 = (1,4,3) \neq id$$
$$\sigma^3 = (5,6)(1,4,3) \neq id$$
$$\sigma^4 = (1,3,4) \neq id$$
$$\sigma^5 = (5,6) \neq id$$
$$\sigma^6 = id$$

לכן, $o(\sigma) = 6$.

$$\tau = (1,2,4)(6,7,3) \neq id$$
$$\tau^2 = (1,4,2)(6,3,7) \neq id$$
$$\tau^3 = id$$

לכן, $o(\tau) = 3$.

סעיף ג: נגדיר $\theta = (1,2)(3,4,5,6,7)$. אזי $o(\theta) = 10$. לא נפרט את הבדיקה.