תרגיל בית 3 אינפי 3

1. יהי (X,d) מרחב מטרי ותהי $a_n \in X$ סדרה. הוכיחו כי $a_n \to a$ אם ורק אם לכל קבוצה פתוחה P כך ש $a \in P$ קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$ מתקיים $a_n \in P$.

פתרון. יש כאן שני כיוונים שצריך להוכיח. כיוון ראשון $(\Rightarrow)$: נניח שמתקיים התנאי עם קבוצות פתוחות.: צריך להוכיח ש $a_n \to a$. יהי $B(a,r)$ כדור שמרכזו ב a. אז לפי משפט, הכדור הזה הוא קבוצה פתוחה. לכן לפי הנתון, קיים קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$ מתקיים $a_n \in B(a,r)$ וזה מה שרצינו.
צד שני הוא קצת יותר קשה $(\Leftarrow)$ נניח ש $a_n \to a$ ותהי P קבוצה פתוחה כך ש $a \in P$, אז לפי הגדרת קבוצה פתוחה קיים $r > 0$ כך ש

$$B(a,r) \subseteq P$$

לפי הגדרת גבול יש n_0 כך שלכל $n > n_0$ מתקיים

$$a_n \in B(a,r)$$

ולכן

$$a_n \in P$$

כנדרש.

2. תהי $a_n \in \mathbb{R}^n$ סדרה של וקטורים. באופן טבעי נאמר כי הטור

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

מתכנס אם סדרת הסכומים החלקיים

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

מתכנסת. הוכיחו כי אם טור המספרים

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||a_n||$$

מתכנס אזי גם טור הוקטורים

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

מתכנס.

נחקה את ההוכחה הסטנדרטית מאינפי 1. נוכיח ש S_n היא סדרת קושי. נסמן

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} ||a_k||$$

שזו כמובן סדרת קושי לפי הנתון. יהי $\epsilon > 0$ ידוע כי קיים n_0 כך שלכל $m > n > n_0$ מתקיים

$$|T_m - T_n| \leq \epsilon$$

כלומר

$$|||a_{n+1}|| + \ldots + ||a_m||| \leq \epsilon$$

כלומר

$$||a_{n+1}|| + \ldots + ||a_m|| \leq \epsilon$$

נבחר את אותו n_0. ואז עבור כל $m > n > n_0$ מתקיים

$$\begin{aligned} ||S_m - S_n|| &= ||a_{n+1} + \ldots + a_m|| \\ &\leq ||a_{n+1}|| + \ldots + ||a_m|| \leq \epsilon \end{aligned}$$

ובזה סיימנו.

3. האם הגבולות הבאים קיימים? אם כן, מצאו אותם.

(א)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sin(xy)}{x}$$

פתרון.

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} y = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} \lim_{(x,y)\to(0,0)} y = \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} \lim_{(x,y)\to(0,0)} y = 0 \end{aligned}$$

(ב)

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^4 + y^4 + z^4}$$

פתרון. נתקדם על הישר $x = y = z$ ונקבל

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{3x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{3x}$$

גבול זה לא קיים ולכן גם לפונקציה המקורית אין גבול.

(ג)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2}$$

פתרון. נציב $t = x^2+y^2+1$ ונקבל

$$\lim_{t\to 1} \frac{\sqrt{t}-1}{t-1} = \lim_{t\to 1} \frac{\sqrt{t}-1}{(\sqrt{t}-1)(\sqrt{t}+1)} = \lim_{t\to 1} \frac{1}{(\sqrt{t}+1)} = \frac{1}{2}$$

לכן הגבול הוא $\frac{1}{2}$.

(ד)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+3y^2}}$$

פתרון.

$$|\frac{xy}{\sqrt{x^2+3y^2}}| \leq \frac{|xy|}{\sqrt{x^2}} = |y| \to 0$$

ולכן

$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{xy}{\sqrt{x^2+3y^2}} = 0$$

4. האם קים $a \in \mathbb{R}$ כך שהפונקציה הבאה תהיה רציפה בנקודה $(0,0)$?

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} & xy \neq 0 \\ a & \text{תרחא} \end{cases}$$

פתרון. לא. אם נתקדם על הישר $x = y$ נקבל ש $f(x,y) = 0$ לאורך ישר זה. אבל אם נתקדם על הישר $y = 2x$ נקבל ש

$$f(x,y) = \frac{x}{2x} - \frac{2x}{x} = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2} \neq 0$$

לכן אין שום a שנוכל לבחור כך השפונקציה תהיה רציפה.

5. האם הפונקציות הבאות רציפות בנקודה $(0,0)$?

(א)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{תרחא} \end{cases}$$

פתרון. לא. נתקדם לאורך הישר $y=\sqrt{x}$ ונקבל

$$\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}\neq 0$$

ולכן f לא רציפה.

(ב)

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^4+y^4)\ln(x^2+y^2) & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

פתרון. כן. מפני ש

$$|(x^4+y^4)\ln(x^2+y^2)|\leq(x^4+2x^2y^2+y^4)\ln(x^2+y^2)=(x^2+y^2)^2\ln(x^2+y^2)$$

נציב $t=x^2+y^2$ ואז

$$\lim_{t\to 0^+}t^2\ln t=0$$

ולכן גם הגבול המקורי הוא 0 והפונקציה רציפה.

6. (א) תהי $f:D\to\mathbb{R}$ פונקציה כאשר $D\subseteq\mathbb{R}^n$. תהי x_0 נקודת הצטברות של D. נניח כי

$$D=D_1\cup D_2\cup\cdots\cup D_n$$

כאשר x_0 נקודת הצטברות של כל D_i. אז מתקיים ש

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=L$$

אם ורק אם לכל i

$$\lim_{x\to x_0}f|_{D_i}(x)=L$$

(רמז: השתמשו בהגדרת גבול לפי היינה)

פתרון. צד אחד של הטענה הוא מיידי. ברור שאם

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=L$$

אז זה אותו גבול לכל פונקציה מצומצמת. עבור הכיוון השני נוכיח עבור מצב של איחוד בין שתי קבוצות בלבד

$$D=D_1\cup D_2$$

כי את המקרה הכללי אפשר להוכיח אחר כך באינדוקציה. ניקח סדרה כלשהיא $a_n \in D$ כך ש $a_n \to x_0$ (צריך להוכיח $f(a_n) \to L$)

עכשיו, אם כל איברי a_n חוץ ממספר סופי נמצאים ב D_1 אז לפי הנתון ש

$$\lim_{x\to x_0} f|_{D_1}(x) = L$$

נקבל ש

$$f(a_n) \to L$$

כנדרש. אם כמעט כל איברי a_n נמצאים ב D_2 ההוכחה דומה. אם יש אינסוף איברים בכל אחד מהם אז אפשר לפצל את a_n לשתי תתי סדרות: b_n שיש בה את האיברים מ a_n כך ש $a_n \in D_1$ ו c_n שיש בה את האיברים מ a_n שנמצאים ב D_2. לפי הנתון

$$f(b_n) \to L$$

$$f(c_n) \to L$$

אבל בגלל ש $f(a_n), f(b_n)$ הן שתי תתי סדרות של $f(a_n)$ שביחד הם כל $f(a_n)$ אז נקבל ש

$$f(a_n) \to L$$

כנדרש.

(ב) הראו כי הטענה לא נכונה אם מחליפים את האיחוד הסופי באיחוד אינסופי.

פתרון. אפשר לקחת את הפונקציה

$$f(x,y) = \frac{y^2}{x}$$

שתחום ההגדרה שלה הוא $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y)\}$. נפצל

$$D = \bigcup_{k\in\mathbb{R}} D_k$$

כאשר D_k הוא הקו הישר $y = kx$. אז

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f|_{D_k}(x) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{k^2x^2}{x} = 0$$

אבל הגבול לא קיים. אפשר לראות זאת אם מתקדמים על המסלול $y = \sqrt{x}$ ואז מקבלים

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x} = 1$$

שזה גבול שונה.

7. האם הגבולות הבאים קיימים? אם כן, מצאו אותם. מצאו גם את הגבולות החוזרים בכל מקרה (אם הם קיימים).

(א)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y}$$

פתרון. נחשב גבולות חוזרים. לפי x ואז לפי y נקבל:

$$h(y) = \lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x-y}{x+y} = -1$$

ולכן

$$\lim_{y\to 0} h(y) = -1$$

לפי y ואז לפי x נקבל:

$$g(x) = \lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{x-y}{x+y} = 1$$

ולכן

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 1$$

הגבולות החוזרים קיימים ושונים ולכן ברור שלפונקציה המקורית אין גבול.

(ב)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)(\sin(\frac{1}{x})\sin(\frac{1}{y}))$$

פתרון. נחשב גבולות חוזרים. לפי x ואז לפי y נקבל:

$$h(y) = \lim_{x\to 0} (x+y)(\sin\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{y})$$

אם $y \neq 0$ גבול זה לא קיים. לכן הגבול החוזר לא קיים. בדומה קל להראות שגם הגבול החוזר השני לא קיים. אבל הגבול דווקא קיים כי

$$|(x+y)(\sin\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{y})| \leq x+y \to 0$$

(ג)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$$

פתרון. נחשב גבולות חוזרים. לפי x ואז לפי yנקבל:

$$h(y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+y^2}=0$$

ולכן

$$\lim_{y\to 0}h(y)=0$$

לפי y ואז לפי x נקבל:

$$g(x)=\lim_{y\to 0}\frac{x^2}{x^2+y^2}=1$$

ולכן

$$\lim_{x\to 0}g(x)=1$$

הגבולות החוזרים קיימים ושונים ולכן הגבול לא קיים.

(ד)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x+sin(y)}{x+y}$$

פתרון. נחשב גבולות חוזרים. לפי x ואז לפי yנקבל:

$$h(y)=\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin y}{x+y}=\frac{\sin y}{y}$$

ולכן

$$\lim_{y\to 0}h(y)=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1$$

לפי y ואז לפי x נקבל:

$$g(x)=\lim_{y\to 0}\frac{x+\sin y}{x+y}=1$$

ולכן

$$\lim_{x\to 0}g(x)=1$$

נראה שהגבול ב $(0,0)$ לא קיים. נתקדם ל $(0,0)$ על $x=-\sin y$ ונקבל שלאורך מסלול זה $f(x,y)=0$. ולכן

$$\lim_{y\to 0}f(-\sin y,y)=0$$

שזה שונה מהגבולות החוזרים ולכן הגבול לא קיים.