מופשטת 1 – פתרון תרגיל בית 11

שאלה 1

הוכיחו כי לא קיימת חבורה פשוטה מסדר $p^k(p+1)$ עבור p ראשוני ו-$k>0$.

פתרון

את המקרה $k=1$ הוכחנו בכיתה, וכעת נוכיח לכל $k>1$.

נניח בשלילה ש-G היא חבורה פשוטה מסדר $p^k(p+1)$ עבור p ראשוני ו-$k>1$. אזי לפי משפט סילו 3 נקבל $n_p=p+1$. נסמן ב-P תת חבורת $p-$סילו כלשהי. אזי $[G:N_G(P)]=p+1$ ולכן קיים שיכון $G\to S_{p+1}$. לכן $p^k(p+1)\,\big|\,(p+1)!$, ומכאן קיים $t\in\mathbb{N}$ כך ש-$p^k t=p!$ וזו סתירה.

מש"ל

שאלה 2

תהי G חבורה כך ש-$n_p\not\equiv 1\left(\mathrm{mod}\ p^2\right)$. הראו שקיימות שתי תת חבורות $p-$סילו P,Q המקיימות $[P:P\cap Q]=[Q:P\cap Q]=p$.

הדרכה

נסמן ב-S את אוסף ת"ח $p-$סילו של G.

תהי P תת חבורה $p-$סילו של G. התבוננו בפעולה $P\times S\to S$ על ידי הצמדה, ונסו לחשב את סדרי המסלולים של פעולה זו.

פתרון

תהי P חבורת $p-$סילו כלשהי (ולפי הנתון קיימות לפחות 2 כאלה) ונסמן ב-S את אוסף ת"ח $p-$סילו. נתבונן בפעולה $P\times S\to S$ על ידי הצמדה ונסמן ב-O_i את המסלולים של הפעולה וב-P_i נציג כלשהו של O_i. מתקיים $|S|=|O_1|+...+|O_r|$. בנוסף, $|O_i|=\left[P:Stab(P_i)\right]$ לפי משפט מסלול-מייצב. כעת, מתקיים $Stab(P_i)=P\cap P_i$.

הסבר: קל לראות שמתקיים $Stab(P_i)=N_G(P_i)\cap P$ ולכן צ"ל $N_G(P_i)\cap P=P\cap P_i$. אחת ההכלות ברורה. בכיוון ההפוך: יהי $x\in P\cap N_G(P_i)$

(אזי זהו איבר מסדר חזקת p) אזי מתקיים $P_i \le \langle x \rangle P_i$ ומכיוון ש- $\langle x \rangle P_i$ היא חבורת p (כי x מנרמל את P_i), נקבל $P_i = \langle x \rangle P_i$ ולכן $x \in P_i$.

נחזור למסלולים שלנו. אם $P_i = P$ אזי $|O_i| = [P : P \cap P] = 1$, אם $P_i \ne P$ אזי $|O_i| = [P : P \cap P_i] > 1$. אנחנו צריכים שיהיה קיים מסלול מאורך p אז נניח בשלילה שאין כזה. כלומר, יש מסלול מאורך 1 ושאר המסלולים הם מאורך $p^k, k > 1$. אבל אז מקבלים $|S| \equiv 1 \left(\mathrm{mod}\ p^2\right)$ בסתירה לנתון. לכן קיימת תת חבורה $p-$סילו Q כך ש- $[P : P \cap Q] = p$ (את השוויון $[Q : P \cap Q] = p$ מוכיחים באופן סימטרי.)

מש"ל

שאלה 3

א. נתונות שש חבורות מסדר 40. זהו אילו חבורות איזומורפיות זו לזו:

$\mathbb{Z}_{40}$, $U_{10} \times \mathbb{Z}_{10}$, $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{10}$, $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_5$

פתרון

$\mathbb{Z}_{40} \cong \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_5$ שכן $(8,5) = 1$. האקספוננט של חבורה זו הוא 40.

$U_{10} = \{1,3,7,9\} \cong \mathbb{Z}_4$ (בדקו ש U_{10} ציקלית) וכמו כן $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_{10}$ ולכן $U_{10} \times \mathbb{Z}_{10} \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{10} \cong \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$. האקספוננט של החבורה הזו הוא 20.

לבסוף האקספוננט של $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$ הוא 10. לכן קיבלנו בסה"כ שלוש חבורות שאינן איזומורפיות.

דרך אחרת- מעבירים לצורה הקנונית שהיא יחידה עד כדי איזומורפיזם.

הראשונה היא $\mathbb{Z}_{40}$, השניה היא $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{20}$. שימו לב:

$\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{20}$.

השלישית היא $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{10}$.

ב. **1.** כמה חבורות אבליות מסדר 500 (עד כדי איזומורפיזם) יש?

פתרון

$500 = 2^2 \cdot 5^3$.

החבורות האבליות הדרושות הן מכפלה ישרה של תת חבורה 2- סילו מסדר 4, בתת חבורה 5-סילו מסדר 125.

יש שתי אפשרויות לתת חבורה 2-סילו מסדר 4 שהיא כמובן אבלית והן: $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$.

יש שלוש אפשרויות לת"ח 5-סילו והן: $\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_5,\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_{25},\mathbb{Z}_{125}$.

בסה"כ יש $2\cdot3=6$ חבורות אבליות מסדר 500.

2. בכמה מהן יש איבר מסדר 4?

<u>פתרון</u>

ב-3 מהן (כאשר מופיע בפירוק $\mathbb{Z}_4$).

3. בכמה מהן יש איבר מסדר 20?

<u>פתרון</u>

ב-3 מהן. (כאשר מופיע בפירוק $\mathbb{Z}_4$) זה נובע מכך שבת"ח 5-סילו יש תמיד איבר מסדר 5, וכמו כן החיתוך של תת חבורה זו עם תת חבורת 2-סילו הוא טריוויאלי.

ג. מצאו מספר חבורות אבליות (עד כדי אוזימורפיזם) מסדר 3600. בכמה מהן יש תת-חבורה 5-סילו ציקלית?

$3600=2^4\cdot3^2\cdot5^2$, משיקולים דומים לשאלה הקודמת יש $5\cdot2\cdot2=20$ חבורות אבליות מסדר 3600 עד כדי איזומורפיזם. ת"ח 5-סילו (כלומר מסדר 25) תהיה ציקלית אמ"מ מופיע הגורם $\mathbb{Z}_{25}$ ולא $\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_5$. יש $5\cdot2=10$ כאלו עד כדי איזומורפיזם.

ד. מצאו את $\exp(S_3),\exp(S_5)$.

<u>פתרון</u>

נמצא את סדרי האיברים ב-S_3: id מסדר 1, כל חילוף הוא מסדר 2, וכל מחזור מאורך 3 הוא מסדר 3. סה"כ יש איברים מסדר 1,2,3, ו-$lcm(1,2,3)=6$ לכן האקספוננט של S_3 הוא 6. כעת נמצא את סדרי האיברים ב-S_5: id מסדר 1, כל מחזור מאורך k ($2\le k\le5$) הוא מסדר

k, תמורות מהצורה $(12)(34)$ הן מסדר 2 ותמורות מהצורה $(12)(345)$ הן מסדר 6. לכן סה"כ סדרי האיברים ב-S_5 הם 1,2,3,4,5,6. מתקיים $lcm(1,2,3,4,5,6)=60$ לכן $\exp(S_5)=60$.

מש"ל

שאלה 4

א. מצאו כמה איברים מכל סדר יש בחבורות $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Z}_{p^3}$.

ב. הוכיחו שבחבורת p אבלית לא ציקלית יש תת חבורה מסדר p^2 שאינה ציקלית.

פתרון

א. בכל החבורות יש איבר אחד מסדר 1 והוא איבר היחידה. ב-$\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$ כל שאר האיברים, כלומר p^3-1 איברים הם מסדר p. ב-$\mathbb{Z}_{p^2}$ יש $\phi(p^2)=p^2(1-\frac{1}{p})=p^2-p$ איברים מסדר p^2. האיברים מסדר p^2 ב-$\mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_p$ הם בדיוק האיברים $(a,b)\in\mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_p$ כך ש-$o(a)=p^2$. מכאן שמספרם הוא $\left(p^2-p\right)p=p^3-p^2$. לכן מספר האיברים מסדר p ב-$\mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_p$ הוא: $p^3-(p^3-p^2)-1=p^2-1$.

באופן דומה מספר האיברים מסדר p^3 ב-$\mathbb{Z}_{p^3}$ הוא: $\phi(p^3)=p^3(1-\frac{1}{p})=p^3-p^2$. איברים מסדר p בחבורה זו הם כל האיברים מהצורה p^2a כאשר $1\le a\le p-1$ (מדוע? תחשבו על מה זה אומר להיות מסדר p בכתיב חיבורי) ולכן יש $p-1$ כאלה. לכן מספר האיברים מסדר p^2 הוא $p^3-\left(p-1\right)-1=p^3-p$.

ב. כדי שחבורת p אבלית לא תהיה ציקלית היא צריכה לכלול גורם מהצורה $\mathbb{Z}_{p^\alpha} \oplus \mathbb{Z}_{p^\beta}$ כאשר $1 \le \alpha < \beta$. עפ"י משפט קושי קיימות $H \le \mathbb{Z}_{p^\beta}, G \le \mathbb{Z}_{p^\alpha}$ כך ש $H \cong G \cong \mathbb{Z}_p$. תת החבורה הדרושה היא $H \oplus G$.

מש"ל

<u>שאלה 5</u>

האם קיימת חבורה אבלית G, כך ש- $\exp(G) = 4$, $|G| = 32$, ו- $\left[G : G^2\right] = 4$?

<u>פתרון</u>

$\exp(G) = 4$, $|G| = 32$ ומכאן G איזומורפית ל- $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$ או ל- $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$.

$$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4 \big/ 2\left(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4\right) \cong \mathbb{Z}_2 \big/ 2\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \big/ 2\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4 \big/ 2\mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$$

והסדר המתקבל הוא שמונה.

$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \big/ 2\left(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4\right) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ וסדר החבורה הוא 16. בכל מקרה לא מקבלים $\left[G : G^2\right] = 4$ ולכן אין חבורה כזו.

מש"ל

<u>שאלה 6</u>

מצאו איזומורפיזם מפורש מ- $A = \mathbb{Z}_{77} \times \mathbb{Z}_5$ ל - $B = \mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_{35}$.

<u>פתרון</u>

שלב ראשון: הפונקציה $f : \mathbb{Z}_{77} \to \mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_7$ המוגדרת על ידי $f(x) = (x \bmod 11, x \bmod 7)$ היא איזומורפיזם (לפי התרגיל הקודם). לכן גם הפונקציה $h_1 : \mathbb{Z}_{77} \times \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_5$ המוגדרת על ידי $h_1(x,y) = (x \bmod 11, x \bmod 7, y)$ היא איזומורפיזם (ברכיב הראשון היא f , וברכיב השני היא פונקציה קבועה).

שלב שני: הפונקציה $g : \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_{35}$ המוגדרת על ידי $g(x,y) = 15x - 14y$ היא איזומורפיזם לפי התרגיל הקודם (אכן, שימו לב שמתקיים $1 = 5 \cdot (3) + 7 \cdot (-2)$).

לכן גם הפונקציה $h_2:\mathbb{Z}_{11}\times\mathbb{Z}_7\times\mathbb{Z}_5\to\mathbb{Z}_{11}\times\mathbb{Z}_{35}$ המוגדרת על ידי $h_2(x,y,z)=(x,15y-14z)$ היא איזומורפיזם.

שלב שלישי: האיזומורפיזם הדרוש הוא ההרכבה $h_2\circ h_1$ המוגדרת על ידי $(x,y)\mapsto(x,15x-14y)$.

מש"ל