פתרון תרגיל בית 9 – מופשטת 1

<u>שאלה 1</u>

נניח ש- $\varphi : H \to G$, $\psi : G \to H$ הומומורפיזמים כך ש- $\psi \circ \varphi = Id_H$. הוכיחו:

א. φ חח"ע, ψ על.

ב. $G = Ker(\psi) \rtimes Im(\varphi)$.

<u>פתרון</u>

א. טריוויאלי, לפי טיעונים מבדידה.

ב. נסמן $K = \ker(\psi), Q = \operatorname{Im}(\varphi)$. לפי ההגדרה מתקיים $K \lhd G, Q \le G$. תחילה נראה כי $K \bigcap Q = \{1\}$. יהי $x \in K \bigcap Q$. אזי קיים $h \in H$ עבורו $x = \varphi(h)$. מכיוון ש- $x \in K$ מתקיים $\psi(\varphi(h)) = h \wedge \psi(\varphi(h)) = 1$ ולכן $h = 1$ ולכן $x = 1$. נותר להראות ש- $G = KQ$. יהי $g \in G$. נניח שקיימים $k \in K, q \in Q$ כך ש- $g = kq$. מתקיים $\psi(k) = 1, \exists x : q = \varphi(x)$. נפעיל את ψ על השוויון $g = kq$ ונקבל: $\psi(g) = \psi(k)\psi(q) = 1 \cdot \psi(\varphi(x)) = x$. לכן $q = \varphi(x) = \varphi(\psi(g))$. נציב זאת בשוויון $g = kq$ ונקבל $k = g\varphi(\psi(g^{-1}))$.

לבסוף, כל $g \in G$ ניתן להצגה הבאה: $g = g\varphi(\psi(g^{-1})) \cdot \varphi(\psi(g))$. האיבר הימני בוודאי שייך ל- Q. האיבר השמאלי במכפלה שייך ל- K, שכן $\psi(g\varphi(\psi(g^{-1}))) = \psi(g)\psi(\varphi(\psi(g^{-1}))) = \psi(g)\psi(g^{-1}) = \psi(1) = 1$.

מש"ל

<u>שאלה 2</u>

א. תהיינה K, Q חבורות. $\theta : Q \to Aut(K)$ הומומורפיזם. הוכיחו ש- $K \rtimes_\theta Q$ היא חבורה.

ב. הראו שאם K אינה אבלית או Q אינה אבלית אז $K \rtimes_\theta Q$ אינה אבלית.

ג. הראו שאם $\theta : Q \to Aut(K)$ אינו ההומומורפיזם הטריוויאלי אז $K \rtimes_\theta Q$ אינה אבלית גם אם K ו Q אבליות.

<u>פתרון</u>

א. סגירות הפעולה: ברור.

אסוציאטיביות:

$$((k_1,q_1)(k_2,q_2))(k_3,q_3) = (k_1\theta_{q_1}(k_2), q_1q_2)(k_3,q_3) = (k_1\theta_{q_1}(k_2)\theta_{q_1q_2}(k_3), q_1q_2q_3)$$

$$(k_1,q_1)((k_2,q_2)(k_3,q_3)) = (k_1,q_1)(k_2\theta_{q_2}(k_3), q_2q_3) = (k_1\theta_{q_1}(k_2\theta_{q_2}(k_3)), q_1q_2q_3) =$$

$$= (k_1\theta_{q_1}(k_2)\theta_{q_1}(\theta_{q_2}(k_3)), q_1q_2q_3) = (k_1\theta_{q_1}(k_2)\theta_{q_1q_2}(k_3), q_1q_2q_3)$$

שימו לב שמתקיים $\theta_a\theta_b = \theta(a)\theta(b) = \theta(ab)$ (מכיוון ש- θ הוא הומומורפיזם).

איבר יחידה: $(1_K, 1_Q)$. קל לבדוק שאכן מתקיים $(1_K,1_Q)(k,q) = (k,q)(1_K,1_Q) = (k,q)$.

ההופכי: ההופכי של (k,q) הוא האיבר $\left(\theta_{q^{-1}}\left(k^{-1}\right),q^{-1}\right)$ (בדקו!)

ב. אם K אינה אבלית אזי קיימים $k_1,k_2\in K$ כך ש- $k_1k_2\neq k_2k_1$. מכאן $(k_1,1)(k_2,1)=(k_1k_2,1)\neq(k_2k_1,1)=(k_2,1)(k_1,1)$. באותו האופן החבורה לא אבלית אם Q אינה אבלית.

ג. אם $\theta:Q\to Aut(K)$ אינו ההומומורפיזם הטריוויאלי אזי קיימים $k\in K$, $q\in Q$ עבורם $\theta_q(k)\neq k$. ולכן מתקיים
$\left(k,1_Q\right)\left(1_K,q\right)=\left(k\theta_{1_Q}\left(1_K\right),q\right)=(k,q)\neq\left(\theta_q(k),q\right)=\left(1_K\theta_q(k),q\right)=\left(1_K,q\right)\left(k,1_Q\right)$.
מש"ל

<u>שאלה 3</u>

רשמו את שוויון המחלקות עבור החבורות S_4,S_5,D_4,Q_8.
למשל: שוויון המחלקות של D_6 היא $2+2+3+3+2=12$.

<u>פתרון</u>

עבור $n\geq 3$ $Z(S_n)$ טריוויאלי. מחלקת צמידות נתונה ב S_n מורכבת מכל התמורות בעלות מבנה מחזורים זהה עבור איזשהו מבנה מחזורים.

משוואת המחלקות של S_4 היא $3+6+8+6+1=24$. כאשר בכל אחת ממחלקות הצמידות $\{(--)\},\{(----)\}$ שישה איברים, במחלקת הצמידות $\{(---)\}$ שמונה איברים ובמחלקת הצמידות $\{(--)(--)\}$ שלושה איברים.

מהי משוואת המחלקות של S_5? גודל מחלקת הצמידות $\{(--)\}$ הוא $10=\binom{5}{2}$.
גודל מחלקת הצמידות $\{(---)\}$ הוא $20=\binom{5}{3}2!$. גודל מחלקת הצמידות $\{(----)\}$ הוא $30=\binom{5}{4}3!$. גודל מחלקת הצמידות $\{(-----)\}$ הוא $24=4!$
גודל מחלקת הצמידות $\{(--)(--)\}$ הוא $15=\frac{\binom{5}{2}\binom{3}{2}}{2}$. גודל מחלקת הצמידות $\{(---)(--)\}$ הוא $20=\binom{5}{3}2!$.
מכאן שוויון המחלקות של S_5 היא $20+15+24+30+20+10+1=120$.
מהו שוויון המחלקות של D_4,Q_8?
אפשר לעשות את החישוב ישירות, אך נסו במקום זאת להוכיח את הטענה הבאה:

עבור חבורת-p לא אבלית G מסדר p^3 מתקיים $|Z(G)|=p$ וגם לכל $a\notin Z(G)$ מתקיים $|conj(a)|=p$. מכאן כל מחלקת צמידות מגודל $1<$ היא מגודל p ומשוואת המחלקות של חבורה מסוג זה היא:
$p^3=\underbrace{p+p+\cdots+\cdots+p}_{p^2 \quad times}$. בפרט אצלנו D_4,Q_8 לא אבליות מסדר $8=2^3$ לכן משוואת המחלקות של כל אחת מהן היא: $8=2+2+2+2$.
מש"ל

שאלה 4

הוכיחו שלכל הומומורפיזם $\theta:\mathbb{Z}_2\to Aut(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2)$ מתקיים $(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2)\rtimes_\theta\mathbb{Z}_2\cong\mathbb{Z}_2{}^3$ או $(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2)\rtimes_\theta\mathbb{Z}_2\cong D_4$.

פתרון

אם θ ההומומורפיזם הטריוויאלי מקבלים בדיוק מכפלה ישרה של $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ ב-$\mathbb{Z}_2$ כלומר את $\mathbb{Z}_2{}^3$. מצד שני עבור כל הומומורפיזם θ שאינו טריוויאלי (ויש כאלה, ראינו למשל אחד בתרגול) מתקיים $(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2)\rtimes_\theta\mathbb{Z}_2$ אינה אבלית (עפ"י שאלה 2 סעיף ג'). יהי θ הומומורפיזם שאינו טריוויאלי, אזי $(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2)\rtimes_\theta\mathbb{Z}_2$ חבורה מסדר 8 והיא אינה אבלית. נראה ש-$(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2)\rtimes_\theta\mathbb{Z}_2$ איזומורפית ל-D_4.

<u>דרך ראשונה</u>

נראה שב-$(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2)\rtimes_\theta\mathbb{Z}_2$ לפחות שני איברים מסדר 2 ומכאן $(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2)\rtimes_\theta\mathbb{Z}_2\cong D_4$ (על-ידי פסילת החבורה האחרת מסדר 8, הלא היא חבורת הקווטרניונים). לכל הומומורפיזם $\theta:\mathbb{Z}_2\to Aut(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2)$ מתקיים $\theta_0=Id_{\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2}$. נקבל ש-
$((1,0),0)((1,0),0)=((1,0)+\theta_0(1,0),0+0)=((1,0)+(1,0),0)=((0,0),0)$ ובאופן דומה מראים ש$((1,1),0)((1,1),0)=((0,0),0)$. מצאנו שני איברים מסדר 2 כדרוש.

<u>דרך שניה</u>

(דרך זו ישירה, ואינה דורשת את מיון החבורות מסדר 8).
נתבונן בשתי תת חבורות של המכפלה החצי ישרה $(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2)\rtimes_\theta\mathbb{Z}_2$. קודם כל יש תת חבורה שאיזומורפית ל-$\mathbb{Z}_2$. נסמן ב-T את האיבר הלא טריוויאלי שלה. בנוסף, יש תת חבורה נורמלית שאיזומורפית ל-$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ שנסמנה ב-K.
כעת המטרה היא למצוא שני יוצרים שיקיימו את היחסים של החבורה הדיהדרלית.
תחילה נשים לב שקיים $x\in K$ כך ש-$Tx\neq xT$ (מדוע?). בנוסף שימו לב כי $T^{-1}=T,\ x^{-1}=x$ (מדוע?) ומתקיים $TxT\in K$. מכיוון ש-K אבלית מתקיים $x(TxT)=(TxT)x$. ברור ש-x,TxT יוצרים את K, ולכן האיברים T,Tx יוצרים את כל החבורה.
כעת, הטענה היא: החבורה נוצרת על-ידי שני איברים $(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2)\rtimes_\theta\mathbb{Z}_2=\langle Tx,T\rangle$ ומקיימת את היחסים של החבורה הדיהדרלית. נראה זאת.
כפי שכבר ראינו מתקיים $T^2=1$. נחשב את הסדר של Tx. הוא לא מסדר 2, שכן T ו-x אינם מתחלפים. הוא לא מסדר 3 (לגרנז') ולכן הוא לא מסדר 4, שכן מתקיים $(Tx)^4=TxTxTxTx=(TxT)x(TxT)x=x^2(TxT)^2=1$.

בנוסף מתקיים היחס $T(Tx)T = TTxT = xT = (Tx)^{-1}$ וזה מסיים את ההוכחה.
מש"ל

שאלה 5

נתבונן בתת חבורה $H = \langle (123),(456) \rangle \le S_6$.

א. תארו את המְרַכֵּז $C_{S_6}(H)$.

רמז: אם $g \in C_{S_6}(H)$ אזי הוא מצמיד את (123) לעצמו ואת (456) לעצמו. אז אפשר לחשב את המְרַכֵּז של $\langle (123) \rangle$ ואת המְרַכֵּז של $\langle (456) \rangle$ ולאחר מכן לעשות חיתוך.

ב. הוכיחו שמתקיים $N_{S_6}(H) = \langle H,(56),(23),(14)(25)(36) \rangle$.

ג. הוכיחו שמתקיים $N_{S_6}(H) / C_{S_6}(H) \cong D_4$.

פתרון

א. איבר במרכז מצמיד את (123) לעצמו, ואת (456) לעצמו. נחשב, למשל, את המרכז של (123). על מנת לחשב את המרכז, יש לבחון את כל האפשרויות לכתוב אותו מתחת לעצמו, תוך שימור מבנה המחזורים. ישנן $3 \cdot 3!$ אפשרויות לעשות זאת עם (123). שימו לב שהתמורה היא למעשה $(123)(4)(5)(6)$. יש 3 דרכים למקם את המזור באורך 3 (והן $(123),(231),(312)$) ובנוסף $3!$ דרכים למקם את נקודות השבת. כלומר, סדר המרכז הוא 18. נמצא אותו. ברור ש- $(123),(123)^{-1}$ נמצאים במרכז. בנוסף, נמצאות שם כל התמורות ב- S_6 אשר לא מזיזיות את $\{1,2,3\}$. כלומר תת החבורה הנוצרת על ידי $\langle (45),(56) \rangle$. לכן המרכז של (123) הוא $\langle (123),(45),(56) \rangle$. באופן דומה, המרכז של (456) הוא $\langle (12),(23),(456) \rangle$. ניתן לראות שהחיתוך של שניהם הוא H.

ב. במנרמל נמצאים האיברים שמצמידים את (123) לכל אחד מהצמודים שלו בחבורה, כלומר ל- $(123),(132),(456),(465)$ (שכן, הצמדה שומרת על מבנה המחזורים). באופן דומה, איבר במנרמל חייב להצמיד את (456) לאחד מהאיברים הללו. כעת נשים לב ש- (123)ו-(456) יוצרים שתי תת חבורות ציקליות זרות, אזי גם הצמודים שלהם (התוצאה של הצמדת שני האיברים האלה עם אותו איבר) צריכים לקיים את התכונה הזאת. נחשב את הסדר של חבורת המנה $N_{S_6}(H) / C_{S_6}(H)$, ונזכור שלמעשה $N_{S_6}(H) / C_{S_6}(H) \cong \left\{ \gamma_g|_H : g \in S_6 \right\} \le Aut(H)$. אנחנו מחפשים את האיברים $x \in S_6$ המקיימים $x(123)x^{-1}, x(456)x^{-1} \in H$. יש 4 אפשרויות עבור $x(123)x^{-1}$

והן $(465),(456),(132),(123)$. לאחר שבחרנו את אחת התמורות, נשארו 2 אפשרויות עבור $x(456)x^{-1}$. לכן יש בסה"כ 8 אפשרויות, כלומר $\left|{N_{S_6}(H)}/{C_{S_6}(H)}\right|=8$. בסעיף א' ראינו שהמרכז הוא H ולכן $N_{S_6}(H)$ היא חבורה גדולה פי 8 מ- H. ננחש אותה:
ניקח את חבורת הסימטריות של $\{1,2,3\}$ כפול חבורת הסימטריות של $\{4,5,6\}$; זו כבר חבורה מסדר 6*6=36, כלומר גדולה פי 4. אבל הצמדה על-ידי אברים בחבורה הזו משאירה את $\langle(123)\rangle$ ואת $\langle(456)\rangle$ במקום; דרוש איבר נוסף שמחליף אותם, והוא $(14)(25)(36)$. ביחד, שתי החבורות הסימטריות והאיבר הזה יוצרים את המנרמל.

ג. מהדיון בסעיף ב' ראינו כי $\left|{N_{S_6}(H)}/{C_{S_6}(H)}\right|=8$. קל לראות ש- ${N_{S_6}(H)}/{C_{S_6}(H)}$ אינה אבלית ושיש בה לפחות שני איברים מסדר 2 ומכאן היא החבורה D_4.
דרך נוספת להסביר מדוע החבורה מסדר 8 שקיבלנו היא D_4:
נסמן $x=(23)H$, $y=(56)H$, $z=(14)(25)(36)H$. איברים אלה מקיימים את היחסים $x^2=y^2=z^2=1$, $xy=yx$ וכן $zxz^{-1}=y$ ו- $zyz^{-1}=x$. לכן $\langle z\rangle\cong\mathbb{Z}_2$ ו- $\langle x,y\rangle\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$.
ניתן להגדיר הומומורפיזם $\theta:\langle z\rangle\to Aut(\langle x,y\rangle)$ על-ידי $\theta_z(a)=zaz^{-1}$. נשים לב שבזכות היחסים $zxz^{-1}=y$ ו- $zyz^{-1}=x$ נקבל ש- $\theta_z(1)=1,\theta_z(x)=y,\theta_z(y)=x,\theta_z(xy)=yx=xy$. זהו לא הומומורפיזם טריויאלי וברור שהחבורה שלנו איזומורפית ל $(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2)\rtimes_\theta\mathbb{Z}_2$ (איך?)
ומכיון שההומורפיזם אינו טריויאלי אז עפ"י מה שהוכחנו בשאלה 4 זאת בדיוק החבורה D_4.
מש"ל

שאלה 6
תהא G חבורה כך ש- $|G|=p^k$ עבור p ראשוני. תהא $H\triangleleft G$ כך ש- $|H|=p$. הוכיחו כי $H\subseteq Z(G)$.
הערה: ניתן לפתור שאלה זו ביותר מדרך אחת. נסו לפתור אותה באמצעות משפט ${N}/{C}$.
פתרון
מכיוון ש- $|H|=p$, H היא תת חבורה ציקלית ולכן אבלית. מתקיים $|Aut(H)|=p-1$. לפי משפט ${N}/{C}$ קיים שיכון ${N(H)}/{C(H)}\to Aut(H)$. נשים לב ש-

וכן $N(H)=G$, היא $G/C(H)$ היא חבורה מסדר חזקת p. לכן $\left|G/C(H)\right|=1$, מה שאומר ש- $G=C(H)$ וזה מוכיח הדרוש.

מש"ל

<u>הגדרה</u>

האקספוננט של חבורה G הוא המספר החיובי הקטן ביותר N כך ש- $a^N=1$ לכל $a\in G$, ומסמנים אותו ב- $\exp(G)$.

<u>שאלה 7</u>

תהי G חבורה אבלית סופית.

א. הוכיחו שלכל מספר טבעי d המקיים $(d,|G|)=1$ הפונקציה $x\mapsto x^d$ מגדירה אוטומורפיזם של G.

ב. הוכיחו שיש שיכון של $U_{\exp(G)}$ ב- $Aut(G)$.

<u>הדרכה</u>: היעזרו בסעיף א' על מנת להגדיר את השיכון. כלומר, התאימו לכל $d\in U_{\exp(G)}$ אוטומורפיזם כלשהו $f_d\in Aut(G)$.

<u>פתרון</u>

א. העלאה בחזקה היא הומומורפיזם כי החבורה אבלית. נחשב את הגרעין, ולשם כך נמצא מספרים t,s עבורם $td+s|G|=1$. כעת, אם $x^d=1$ אז $x=x^{td+s|G|}=\left(x^d\right)^t\left(x^{|G|}\right)^s=1$ ולכן ההומומורפיזם חח"ע ולכן (מכיוון שהחבורה סופית) על.

ב. נניח $|G|=n$. נגדיר $f:U_{\exp(G)}\to Aut(G),\quad d\mapsto f_d$ כאשר $f_d:G\to G$ היא הפונקציה $f_d(x)=x^d$. יהי $d\in U_{\exp(G)}$. בשל האבליות של G ברור ש- f_d הומומורפיזם. מכיוון ש- G סופית מ"ל ש f_d חח"ע כדי להסיק ש $f_d\in Aut(G)$. נראה שהגרעין טריוויאלי. נניח $x^d=1_G$. אזי $o(x)|d$. כמו כן מהגדרת אקספוננט $o(x)|\exp(G)$. כעת, $d\in U_{\exp(G)}$ ומכאן $(d,\exp(G))=1$ ומצד שני $o(x)\,\Big|\,\exp(G),d$. לכן, $o(x)=1$ ו- $x=1_G$. לכן הגרעין טריוויאלי. קיבלנו שאכן $f_d\in Aut(G)$. קל לראות ש- $f(d_1d_2)=f_{d_1d_2}=f_{d_1}\circ f_{d_2}=f(d_1)f(d_2)$ ולכן f הומומורפיזם. כדי להוכיח חח"ע של f מ"ל שעבור $\exp(G)\geq d\neq 1$ כך ש- $d\in U_{\exp(G)}$ מתקיים $f_d\neq Id_G$.

ואמנם, אחרת מתקיים לכל $x \in G$: $x^d = x$. מכאן $\forall x \in G$, $x^{d-1} = 1_G$ ולכן $\exp(G) | d-1$ (מדוע?). בפרט, $\exp(G) \le d-1$. זאת סתירה לכך ש- $\exp(G) \ge d$.

מש"ל

<u>שאלת אתגר</u>

תהי G חבורה סופית כלשהי. הוכיחו שאם $Aut(G)$ ציקלית ולא טריוויאלית, אזי היא מסדר זוגי.

<u>פתרון</u>

תחילה נוכיח ש- G אבלית. מכיון שתת חבורה של חבורה ציקלית היא ציקלית נקבל עפ"י הנתון ש- $Inn(G)$ ציקלית. מתקיים תמיד $Inn(G) \cong G/Z(G)$. מכאן $G/Z(G)$ ציקלית ועפ"י תרגיל שהוכחנו בעבר $G/Z(G)$ טריוויאלית. כלומר $G = Z(G)$ ולכן G אבלית.

כעת, בכל חבורה אבלית הפונקציה $f : G \to G, \quad f(x) = x^{-1}$ היא אוטומורפיזם. קל לראות שהסדר של f הוא 1 או 2.

<u>אפשרות ראשונה</u>: הסדר של f הוא 1. מכאן $x = x^{-1}$ לכל x. כלומר כל האיברים פרט ליחידה מסדר 2 (שימו לב ש- G אינה טריוויאלית כי אחרת $Aut(G)$ טריוויאלית). לכן G חבורה אבלית סופית מסדר חזקת 2 ולכן $G \cong \mathbb{Z}_2^n$ עבור איזשהו $n \in \mathbb{N}$. אבל $Aut(\mathbb{Z}_2^n) \cong GL_n(\mathbb{Z}_2)$ שאינה אבלית עבור $n > 1$ ולכן גם אינה ציקלית. עבור $n = 1$ נקבל $GL_1(\mathbb{Z}_2) = \{1\}$. שהינה חבורה טריוויאלית.

לכן האפשרות הראשונה אינה קיימת למעשה.

<u>אפשרות שניה</u>: הסדר של f הוא 2. מכיון שסדר של איבר מחלק את סדר החבורה נקבל מיד ש- $Aut(G)$ מסדר זוגי.

מש"ל