חשבון אינפיניטסימלי 4

חי סרוסי

עניינים מנהליים : chaisarussi@gmail.com , בוחן שחלק מהשאלות ילקחו מהתרגילים ויהווה 10%. המבחן, במפתיע, מהווה 90%. שעות קבלה בימי שלישי בתיאום מראש במייל.

אנליזה וקטורית : חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי התפתח מתוך רצון לתאר תופעות פיסיקאליות באמצעות מודלים מתמטיים.

- המקרה הפשוט ביותר הוא שימוש במודל חד מימדי לתאר תופעות כגון :
  - מרחק נסיעה בנקודה לאורך זמן
  - ערך מניה בנקודה לאורך זמן

האובייקטים הבסיסים שיעזרו לנו לתאר תופעות הם שדות סקלרים ושדות וקטורים.

הגדרה : שדה סקלרי הוא מהצורה $F\colon \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

הגדרה : שדה וקטורי $F\colon \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

דוגמאות:

1. שדה כח – כח הכבידה פועל בין שתי מסות והכח הוא בכיוון הוקטור שבינהם
2. חור ניקוז
3. ברז

- שדה וקטורי מתואר באופן מתמטי ע״י פונקציה וקטורית $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ כך ש $\mathrm{F}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}) = f_1\hat{\imath} + f_2\hat{\jmath} + f_3\hat{k}$ כאשר $\hat{\imath} = (1,0,0), \hat{\jmath} = (0,1,0), \hat{k} = (0,0,1)$.

4. $f(x,y) = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} = (1,-2)$, אז זוהי פונקציה $f\colon \mathbb{R}^2 -> \mathbb{R}^2$ וקבועה.
5. $f(x,y) = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$ היא שדה וקטורי שיש לה ״ברז״ ב0. (הכוונה היא שכל הוקטורים יוצאים מ0)
6. $f(x,y) = -y\hat{\imath} + x\hat{\jmath}$ חלקיקים רחוקים מהראשית נעים מהר יותר (וזה מדמה סיבוב של המישור סביב 0)
7. אותה תנועה במהירות קבועה יהיה נתון ע״י $f(x,y) = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\hat{\imath} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\hat{\jmath}$.
8. נרצה למדל זרימה של מים סביב חור ניקוז $f(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}\hat{\imath} + \frac{x}{x^2+y^2}\hat{\jmath}$.

שדה גרדיאנט (∇) :

סימון לאופרטור הגזירה גרדיאנט ∇U של שדה סקלרי $U\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ מוגדר להיות שדה וקטורי $\nabla U\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ המתאים לכל נקודה במרחב את וקטור הגרדיאנט. יש לציין כי $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$

- תזכורת מאינפי 3 : בכל נקודה (x,y) הגרדיאנט בנקודה הוא וקטור המצביע בכיוון שבו השינוי המקסימלי וגודלו הוא קצב השינוי המקסימלי.

9. $u(x,y) = x^2 + y^2$ אזי $\nabla u = (2x, 2y)$.
10. $u(x,y) = x^2 - y^2$ אזי $\nabla u = (2x, -2y)$
11. טמפרטורה : $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (שדה סקלרי!) ו$\nabla T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ הוא שדה גרדיאנט שבו כל וקטור מצביע על כיוון השינוי המקסימלי של הטמפרטורה.
    מבחינה פיסיקלית : חום מתפשט לכיוון הטמפרטורה הנמוכה ביותר, ולכן השדה הוקטורי שמתאר את התפשטות הום הוא $F = -k\nabla T$, כאשר k קבוע אשר תלוי בחומר ממנו עשוי המרחב.