חשבון אינפיניטסימלי 3 - תרגול 6

הערה. רוב ההגדרות והמשפטים של המושגים מופיעים בתרגול מספר 5.

1 נגזרת מכוונת

תרגיל 1.1. חשבו את הנגזרת $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ כאשר $f(x,y)=e^{xy}$ ו $v=(1,1)$.

פתרון. נשים לב, ש $\frac{\partial f}{\partial x}=ye^{xy}$ ו $\frac{\partial f}{\partial y}=xe^{xy}$ קיימות ורציפות בכל $\mathbb{R}^2$, ולכן f דיפרנציאבילית בכל $\mathbb{R}^2$ ובפרט ב $(0,0)$. על פי המפשט שרמשמנו, אם f דיפרנצאיבילית ב (a,b), אזי

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a,b)=df_{(a,b)}(v)=\nabla f(a,b)\,v.$$

בפרט,

$$\begin{aligned}\frac{\partial(e^{xy})}{\partial(1,1)}&=\nabla e^{xy}(0,0)(1,1)\\&=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\\&=(0\,0)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=0\end{aligned}$$

הערה. שימו לב, מבחינה "פורמלית", אנחנו מכפילים וקטור עמודה במטריצה. מבחינתנו, זה לא ממש משנה. ניתן להשתמש ב"פרשנות" שמתאימה באותו הרגע. כמו כן, במקרה של פונקציה $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, ו $v\in\mathbb{R}^n$, ניתן לחשוב על $\nabla f(a)$ גם בתור וקטור ב $\mathbb{R}^n$ ולאו דווקא כמטריצה, ולמעשה מתקיים

$$\begin{aligned}\nabla f(a)\,v&=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\dots\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\\vdots\\v_n\end{pmatrix}\\&=v_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)+\dots+v_n\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\\&=\left\langle\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\dots\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right),(v_1,\dots,v_n)\right\rangle\end{aligned}$$

כלמר

$$\nabla f(a)\,v=\langle\nabla f(a),v\rangle$$

בסימונים אחרים.

סתם, בשביל לוודא שהמפשט עובד, ננסה לגזור פעם אחת לפי ההגדרה:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left(e^{xy}\right)}{\partial\left(1,1\right)}\left(0,0\right) &= \lim_{t\to0}\frac{e^{xy}\left(t,t\right)-e^{xy}\left(0,0\right)}{\left\Vert (t,t)\right\Vert }\\ &= \lim_{t\to0}\frac{e^{t^{2}}-1}{\sqrt{2}t}\\ &= \lim_{t\to0}\frac{\left(e^{t^{2}}-1\right)'}{\left(\sqrt{2}t\right)'}\\ &= \lim_{t\to0}\frac{2te^{t^{2}}}{\sqrt{2}}=0\end{aligned}$$

כמו שרצינו.

תרגיל 2.1. הוכיחו, שאם $f:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ דיפרנצאיבילית ב a, ו $\nabla f\left(a\right)\neq0$ (כמובן וקטור ה 0), אזי קיים ויחיד $v\in\mathbb{R}^{n}$ כך ש

$$\left\Vert v\right\Vert =1$$

$\frac{\partial f}{\partial v}\left(a\right)$ מקסימלי עבור $\left\Vert v\right\Vert =1$. (במילים אחרות, קיים כיוון בו הנגזרת הכיוונית היא מקסימלית).

כיוון ש fדיפרנציאבילית ב a, מתקיים

$$.\frac{\partial f}{\partial v}\left(a\right)=\left\langle \nabla f\left(a\right),v\right\rangle$$

נזכר בקצת לינארית. על פי אי-שוויון קושי שוורץ, לכל $v,u\neq0$ מתקיים:

$$\left\langle v,u\right\rangle \leq\left\Vert v\right\Vert \left\Vert u\right\Vert$$

או באופן שקול:

$$.\frac{\left\langle v,u\right\rangle }{\left\Vert v\right\Vert \left\Vert u\right\Vert }\leq1$$

כזכור, מלינארית אם $u\neq v$, האי-שוויון הוא חד. (מי שלא זוכר, אז בקצרה:

$$.xy\leq\frac{x^{2}+y^{2}}{2}$$

ויש שוויון, אם ורק אם $v=u$. עכשיו, אם

$$\left\Vert v\right\Vert =\left\Vert (v_{1},\ldots,v_{n})\right\Vert =\left\Vert u\right\Vert =\left\Vert (u_{1},\ldots,u_{n})\right\Vert =1$$

אזי מתקיים:

$$\begin{aligned}\langle v,u\rangle &= \sum_{i=1}^{n} v_i u_i \le \sum_{i=1}^{n} \frac{v_i^2+u_i^2}{2}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} v_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} u_i^2\\ &= \frac{1}{2}\left\|v\right\|^2 + \frac{1}{2}\left\|u\right\|^2\\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1\end{aligned}$$

ויש שוויון אם ורק אם $x_i = y_i$ לכל $1 \le i \le n$).
עכשיו, פשוט נציב במקום

$$u = \frac{\nabla f\left(a\right)}{\left\|\nabla f\left(a\right)\right\|}$$

לכל וקטור יחידה v (כלמר, $\left\|v\right\| = 1$)

$$\begin{aligned}\langle u,v\rangle &= \frac{\langle \nabla f\left(a\right), v\rangle}{\left\|\nabla f\left(a\right)\right\|\left\|v\right\|}\\ &= \frac{\langle \nabla f\left(a\right), v\rangle}{\left\|\nabla f\left(a\right)\right\|}\ \left(\left\|v\right\| = 1\right)\\ &\le \frac{\langle \nabla f\left(a\right), \nabla f\left(a\right)\rangle}{\left\|\nabla f\left(a\right)\right\|\left\|\nabla f\left(a\right)\right\|}\\ &= 1\end{aligned}$$

כמו שאמרנו, המקסימום הוא יחיד מא"ש קושי שוורץ ולכן

$$v = \frac{\nabla f\left(a\right)}{\left\|\nabla f\left(a\right)\right\|}$$

הוא הוקטור שנותן את המקסימום.

2 גזירות ורציפות

ראינו, שקיום דיפרנציאל גורר רציפות. נרצה לדעת, האם יש קשר בין קיום נגזרות חלקיות ורציפות. במקרה הכללי, מסתבר, שהתשובה היא שלילית - ייתכן שלפונקציה יהיו נגזרות חלקיות בכל $\mathbb{R}^n$, בלי ש f תהיה רציפה בכל $\mathbb{R}^n$.

דוגמה 1.2. נתבונן ב

$$f\left(x,y\right) = \begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & \left(x,y\right) \ne \left(0,0\right)\\ 0 & \left(x,y\right) = \left(0,0\right)\end{cases}.$$

מתקיים

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x} = 0$$

באופן סימטרי, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$. בכל נקודה אחרת, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ קיימות כמנה של פונקציות גזירות. מצד שני, $f(x,y)$ לא רציפה ב 0.

לאחר שראינו שקיום נגזרות בנקודה עדיין לא תנאי מספיק לרציפות, נזכר שאם נגזרות רציפות בסביבה של הנקודה, אזי הפקונציה היא דיפנרציאבילית. נראה שקיום נגזרות חקליות חסומות גורר דיפרנציאביליות.

תרגיל 2.2. תהי $E\subseteq\mathbb{R}^2$ פתוחה, $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ונניח ש $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ קיימות וחסומות ב $\mathbb{R}^2$. הוכיחו, ש f רציפה ב $\mathbb{R}^2$.

פתרון. נראה, ש f רציפה בכל $(a,b)\in E$. כזכור, מספיק להראות שמתקיים:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}\left|f(x,y)-f(a,b)\right| = 0 .$$

מתקיים:

$$\begin{aligned} 0 &\le \lim_{(x,y)\to(a,b)}\left|f(x,y)-f(a,b)\right| \\ &= \lim_{(x,y)\to(a,b)}\left|f(x,y)-f(x,b)+f(x,b)-f(a,b)\right| \\ &\le \lim_{(x,y)\to(a,b)}\left|f(x,y)-f(x,b)\right| + \lim_{(x,y)\to(a,b)}\left|f(x,b)-f(a,b)\right| \end{aligned}$$

נשים לב, שעל פי ההנחה לכל הנגזרות החלקיות קיימות, ולכן על פי משפט ערך הממוצע של להגרנז', לכל y קיימת s בין y ו b, ו t בין x ל a, כך שמתקיים:

$$\begin{aligned} \left|f(x,y)-f(x,b)\right| &= \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,s)\right|\left|y-b\right| \\ \left|f(x,b)-f(a,b)\right| &= \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,b)\right|\left|x-a\right| . \end{aligned}$$

נחזור לחישוב הגבול: כמו כן, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,s)$ ו $\frac{\partial f}{\partial x}(t,b)$ חסומות, ולכן

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}\left|f(x,y)-f(x,b)\right| + \lim_{(x,y)\to(a,b)}\left|f(x,b)-f(a,b)\right| =$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,s)\right|\left|y-b\right| + \lim_{(x,y)\to(a,b)}\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,b)\right|\left|x-a\right| =$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,s)\right|\lim_{(x,y)\to(a,b)}\left|y-b\right| + \lim_{(x,y)\to(a,b)}\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,b)\right|\lim_{(x,y)\to(a,b)}\left|x-a\right| = 0$$

(כי גבול של מכפלה של ביטוי חסום וביטוי ששואף ל 0 הוא 0). ולכן, f רציפה.

נשים לב, שחסימות של נגזרות חלקיות עדיין לא גוררת גזירות, למרות שהיא גוררת רציפות.

דוגמה 3.2. נתבונן בפונקציה

$$.f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\left(\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\right) & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

הפונקציה רציפה $(0,0)$ מפני ש \frac{y}{\sqrt{x^{2}+y^{2}}}

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

(קל לראות אם עוברים לפולריות) ו $\sin$ חסומה, ויש לנו מכפלה של חסום כפול 0. וכן הנגזרותו החלקיות ב $(0,0)$ הן 0 באופן זהותי, כיוון ש f מתאפסת על ציר ה x ועל ציר ה y, ובכל נקודה אחרת קיימות באופן זהותי. מצד שני, הפוקציה אינה דיפרנציאבילית ב $(0,0)$, מפני שלא קיים הגבול

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-df_{(0,0)}(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)0-f_y(0,0)0}{\sqrt{x^2+y^2}}=$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\left(\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}=$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}\sin\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

כי אם ניקח למשל מסלול $x=y$ נקבל את הגבול

$$\lim_{(x\to0)}\frac{1}{2}\sin\left(\ln|x|\right)$$

מפני של $\sin$ אין גבול באינסוף. מצד שני

$$f'_x=\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{2x^2y}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}\right)\sin\left(\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)-\frac{2x^2y}{x^2+y^2}\cos\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

$$f'_y=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{2xy^2}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}\right)\sin\left(\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)-\frac{2xy^2}{x^2+y^2}\cos\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

היא פונקציה חסומה בסביבה של $(0,0)$ כי כל גורם שמופיע בביטטוי הוא חסום.

3 גרדיאנט ומטריצת יעקובי.

תחילה, נציג כמה סימונים.

צורת רישום. . אם X קבוצה כלשהי, ו $f:X\to\mathbb{R}^m$, נסמן $f(x)=(f_1(x),\ldots,f_m(x))$ או

$$.f(x)=\begin{pmatrix} f_1(x)\\ \vdots \\ f_m(x)\end{pmatrix}$$

אם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$ היא פונקציה גזירה בכל רכיב, נסמן

$$.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(a)=f'(a)=\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}t}\\ \vdots \\ \frac{\mathrm{d}f_n}{\mathrm{d}t}\end{pmatrix}(a)$$

באותו אופן, אם $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$.

$$.\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a)\\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(a)\end{pmatrix}$$

בסימונים האלה, אם $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$,

$$\begin{aligned}\nabla f(a)&=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\ldots\frac{\partial f}{\partial x_n}(aa)\right)\\ &=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a)\\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

כאשר $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, ו $1<m$, לעיתים מסמנים

$$.J_f(a)=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a)\\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a)\end{pmatrix}$$

המטריצה $J_f(a)$ נקראת מטריצת יעקובי.

כזכור, אם $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ דיפרנציאבילית ב a, אז מתקיים

$$.df_a(v)=\nabla f(a)v$$

שימו לב, שהרישום "מתעלם" מהמימד m, כי בכל מימד m, למעשה נקבל:

$$\begin{aligned}\nabla f(a)v&=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\cdots\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)\begin{pmatrix} v_1\\ \vdots \\ v_n\end{pmatrix}\\ &=v_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)+\cdots+v_n\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\end{aligned}$$

ללא הבדל אם מתייחסים אל $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ כוקטור עמודה או מספר.

הערה. $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ דיפרנציאבילית אם ורק אם f_i דיפרנציאבילית לכל $1\leq i\leq m$. הדיפרנציאל $\mathrm{d}f_a$ היא העתקה לינארית, ו $J_f(a)$ היא המטריצה המייצגת של העתקה הלינארית. כמו כן, כאשר הדבר לא עלול ליצור בלבול, לעיתים נזהה את $\mathrm{d}f_a$ עם המטריצה המייצגת שלה $J_f(a)$ ופשוט נרשום:

$$\mathrm{d}f_a=J_f(a)=\nabla f(a)$$

ו

$$\mathrm{d}f_a(v)=J_f(a)v.$$

דוגמה 1.3. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, המוגדרת על ידי $f(t)=(\cos t,\sin t,t)$. אזי

$$f'(t)=\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\\ 1\end{pmatrix}.$$

תרגיל 2.3. תהי $f:(0,\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ המוגדרת על ידי $f(r,\theta)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$. מצאו את $J_f(r,\theta)$.

פתרון. מתקיים

$$\begin{aligned}J_f(r,\theta)=\nabla f(r,\theta)&=\left(\frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta)\ \frac{\partial f}{\partial\theta}(r,\theta)\right)\\&=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial r}(r,\theta) & \frac{\partial f_1}{\partial\theta}(r,\theta)\\ \frac{\partial f_2(r,\theta)}{\partial r} & \frac{\partial f_2}{\partial\theta}(r,\theta)\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial r} & \frac{\partial(r\cos\theta}{\partial\theta}\\ \frac{\partial(r\sin\theta)}{\partial r} & \frac{\partial(r\sin\theta)}{\partial\theta}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}\end{aligned}$$

תרגיל 3.3. מצאו את $\mathrm{d}f_{(0,1)}(v,u)$ כאשר $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ מוגדרת על ידי $f(x,y)=(e^y\cos x,e^y\sin x)$.

פתרון. מתקיים

$$\begin{aligned}df_{(0,1)}(v)&=J_f(0,1)(v)\\&=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x}(0,1) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(0,1)\\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(0,1) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(t)(0,1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v\\ u\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-e^y\sin x & e^y\cos x\\ e^y\cos x & e^y\sin x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v\\ u\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-ve^y\sin x+ue^y\cos x\\ ve^y\cos x+e^y\sin x\end{pmatrix}\end{aligned}$$

4 כלל שרשרת.

כלל שרשרת הוא המשפט שנותן את הקשר בין פונקציות דיפרנציאביליות והרכבה שלהן. בפרט, הוא נותן תנאים מספיקים בהן $f \circ g$ דיפרנציאבילית, וגם מאפשר לחשב את הדיפרנציאל ומטריצות יעקובי בצורה יעילה יחסית.

משפט 1.4. (כלל שרשרת). תהי $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ו $D \subseteq \mathbb{R}^m$, ו $f : E \to D$, דיפרנציאבילית ב a, $g : D \to \mathbb{R}^k$ דיפונציאבילית ב $f(a)$. אזי $g \circ f$ דיפרנציאבילית ב a ומתקיים:

$$\mathrm{d}(g \circ f)_a = \mathrm{d}g_{f(a)} \circ \mathrm{d}f_a.$$

מכיוון ש $\mathrm{d}g_{f(a)}$ היא העתקה לינארית עם מטריצה מייצגת $J_g(f(a))$ (או בסימון אחר $\nabla g(f(a))$), ו $\mathrm{d}f_a$ היא העתקה לינארית עם מטריצה מייצגת $J_f(a)$ ($\nabla f(a)$), לכן ההרכבה שלהן$\mathrm{d}(g \circ f)$ היא העתקה ליאנראית עם המטריצה המייצגת $J_g(f(a)) J_f(a)$.

תרגיל 2.4. נניח ש $(x_1(t), \ldots, x_n(t)) = x(t)$ ($x : (a,b) \to \mathbb{R}^n$) גזירה בכל רכיב, ו $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ דיפרנציאבילית. הוכיחו ש $f(x(t))$ גזירה ומצאו את $(f(x(t)))'$.

פתרון 3.4. גזירות נובעת באופן מיידי מכלל שרשרת, מכיוון שנתון ש x ו f דיפרנציאביליות על פי הנתון. בעזרת כלל שרשרת נקבל:

$$\begin{aligned}
(f(x(t)))' &= \mathrm{d}f_{(x(t))} \cdot \mathrm{d}x_t \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1(t)) \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1(t))\right)\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x(t)) \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n}(x(t))\right)\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}(t) \\ \vdots \\ \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}(t) \end{pmatrix} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x(t))\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}(t) + \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n}(x(t))\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}(t)
\end{aligned}$$

ברישום מקוצר, הנוסחא האחרונה הופכת ל

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} + \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}.$$

תרגיל 4.4. הוכיחו בעזרת כלל שרשרת את הטענות הבאות:

1. אם $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ דיפרנצאיבילית ב a, אזי $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \mathrm{d}f_a(v)$.

   פתרון. על פי ההגדרה,

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}.$$

נגדיר פונקציה $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ על ידי $g(t)=a+tv$. נשים לב, השביטוי

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(a+tv)-f(a)}{t}$$

הוא למעשה $(f\circ g)'(0)$. נפעיל כלל שרשרת ונקבל:

$$(f\circ g)'(0)=\mathrm{d}f_{g(0)}\circ\mathrm{d}g_0=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(g(0))\ldots\frac{\partial f}{\partial x_n}(g(0))\right)\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{d}g_1(0)}{\mathrm{d}t}\\ \vdots\\ \frac{\mathrm{d}g_n(0)}{\mathrm{d}t}\end{pmatrix}.$$

נשים לב, ש

$$\begin{aligned}g(t)&=a+tv\\ &=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}a_1+tv_1\\ \vdots\\ a_n+tv_n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ולכן,

$$dg_0=g'(0)=\begin{pmatrix}a_1+tv_1\\ \vdots\\ a_n+tv_n\end{pmatrix}'_{t=0}=\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}.$$

כמו כן, $g(0)=a+0\cdot t=a$. נציב ונקבל:

$$\begin{aligned}(f\circ g)'(0)&=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(g(0))\ldots\frac{\partial f}{\partial x_n}(g(0))\right)\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{d}g_1(0)}{\mathrm{d}t}\\ \vdots\\ \frac{\mathrm{d}g_n(0)}{\mathrm{d}t}\end{pmatrix}\\ &=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\ldots\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}\\ &=df_a(v)\end{aligned}$$

כנדרש.

2. אם $f,g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ הן דיפרנציאביליות ב a , אזי

$$\mathrm{d}(f+g)_a=\mathrm{d}f_a+\mathrm{d}g_a.$$

פתרון. נגדיר $h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^2$ על ידי

$$h\left(x\right)=\left(f\left(x\right),g\left(x\right)\right)$$

ו $k:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ על ידי

$$.k\left(t,s\right)=t+s$$

מתקיים:

$$.f+g=k\circ h$$

בעזרת כלל שרשרת, נקבל:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\left(f+g\right)&=\mathrm{d}k_{h(x)}\circ\mathrm{d}h_x\\
&=\left(\frac{\partial k}{\partial t}\left(h\left(x\right)\right)\ \frac{\partial k}{\partial s}\left(h\left(x\right)\right)\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x\right)\ldots\frac{\partial f}{\partial x_n}\left(x\right)\\ \frac{\partial g}{\partial x_1}\left(x\right)\ldots\frac{\partial g}{\partial x_n}\left(x\right)\end{pmatrix}\\
&=\left(1\,1\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x\right)\ldots\frac{\partial f}{\partial x_n}\left(x\right)\\ \frac{\partial g}{\partial x_1}\left(x\right)\ldots\frac{\partial g}{\partial x_n}\left(x\right)\end{pmatrix}\\
&=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(a\right)+\frac{\partial g}{\partial x_1}\left(a\right)\ldots\frac{\partial f}{\partial x_n}\left(a\right)+\frac{\partial g}{\partial x_n}\left(a\right)\right)\\
&=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(a\right)\ldots\frac{\partial f}{\partial x_n}\left(a\right)\right)+\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}\left(a\right)\ldots\left(a\right)\right)\\
&=\mathrm{d}f_a+\mathrm{d}g_a
\end{aligned}$$

תרגיל 5.4. תהיינה $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ ו $g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^k$ דיפרנציאביליות. עבור $h=g\circ f$, אם נסמן

$$h=\begin{pmatrix}h_1\\ \vdots\\ h_k\end{pmatrix},g=\begin{pmatrix}g_1\\ \vdots\\ g_k\end{pmatrix}$$

בטאו את $\frac{\partial h}{\partial x_j}$ ואת $\frac{\partial h_i}{\mathrm{d}x_j}$ על ידי שורות ועמודות של J_g ו J_f ומונחים של $\nabla g_i\left(f\left(a\right)\right)$ ו $\frac{\partial f}{\partial x_j}\left(a\right)$ בהתאמה.

פתרון. מצד אחד,

$$J_h\left(a\right)=\begin{pmatrix}\frac{\partial h_1}{\partial x_1}\left(a\right) & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n}\left(a\right)\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial h_k}{\partial x_1}\left(a\right) & \ldots & \frac{\partial h_k}{\partial x_m}\left(a\right)\end{pmatrix}$$

מצד שני, על פי כלל שרשרת:

$$.J_h\left(a\right)=J_g\left(f\left(a\right)\right)\cdot J_f\left(a\right)=$$

נשווה את האגפים ונקבל:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_k}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial h_k}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(f(a)) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}(f(a)) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial y_1}(f(a)) & \dots & \frac{\partial g_k}{\partial y_m}(f(a)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix}$$

אם נסמן שורה ה-i של המטריצה A על ידי $R_i(A)$ ואת העמודה ה-j שלה על ידי $C_j(A)$. מכפל מטריצות, נקבל:

$$\begin{aligned} (J_h(a))_{ij} &= \left(R_i\left(\mathrm{d}g_{f(a)}\right) C_j\left(\mathrm{d}f_a\right)\right) \\ &= \frac{\partial g_i(f(a))}{\partial y_1}\frac{\partial f_1(a)}{\partial x_j} + \cdots + \frac{\partial g_i(f(a))}{\partial y_m}\frac{\partial f_m(a)}{\partial x_j} \\ &= \nabla g_i(f(a))\frac{\partial f_i(a)}{\partial x_j} \\ &= \mathrm{d}g_{i,f(a)}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\right) \end{aligned}$$

באותו אופן,

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x_j}(a) &= C_i(J_h(a)) \\ &= C_i(J_g(f(a))J_f(a)) \\ &= J_g(f(a))C_i(J_f(a)) \\ &= J_g(f(a))\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \end{aligned}$$

תרגיל 6.4. תהי $g:(0,\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ המגודרת על ידי $g(r,\theta)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ ותהי $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית. מצאו את $\frac{\partial(f\circ g)}{\partial r}$ ואת $\frac{\partial(f\circ g)}{\partial\theta}$.

פתרון. נשתמש בכלל שרשרת ובתרגיל הקודם:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(f\circ g)}{\partial r}(r,\theta) &= \mathrm{d}f_{(r\cos\theta, r\sin\theta)}\left(\frac{\partial g}{\partial r}(r\cos\theta, r\sin\theta)\right). \\ \frac{\partial(f\circ g)}{\partial\theta}(r,\theta) &= \mathrm{d}f_{(r\cos\theta, r\sin\theta)}\left(\frac{\partial g}{\partial\theta}(r\cos\theta, r\sin\theta)\right) \end{aligned}$$

שימו לב, שכב חישבנו את

$$J_g(r,\theta) = \left(\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta), \frac{\partial g}{\partial\theta}(r,\theta)\right)\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

ולכן

$$
\begin{aligned}
.\frac{\partial (f\circ g)}{\partial r}(r,\theta) &= \mathrm{d}f_{(r\cos\theta,r\sin\theta)}\left(\frac{\partial g}{\partial r}(r\cos\theta,r\sin\theta)\right)\\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)\ \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta)\right)\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}\\
&= \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)+\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta)\\
\frac{\partial (f\circ g)}{\partial \theta}(r,\theta) &= \mathrm{d}f_{(r\cos\theta,r\sin\theta)}\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}(r\cos\theta,r\sin\theta)\right)\\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)\ \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta)\right)\begin{pmatrix}-r\sin\theta\\ r\cos\theta\end{pmatrix}\\
&= -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)+r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta)
\end{aligned}
$$

כאשר f'_x ו f'_y היא צורה מקוצרת של $f'_x(r\cos\theta,r\sin\theta)$ ו $f'_y(r\cos\theta,r\sin\theta)$ בהתאמה.

תרגיל 7.4. תהי $A=\left\{(x,y)\,\middle|x>0\wedge y>0\right\}$ ותהי $f:A\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית, כך ש

$$f'_x(x,y)\,x+yf'_y(x,y)=nf(x,y)$$

לכל $(x,y)\in A$. הוכיחו, שלכל $(x,y)\in A$ ולכל $0<t$ מתקיים

$$.f(tx,ty)=t^nf(x,y)$$

פתרון. תהי $(x,y)\in A$. נגדיר $g(t)=f(tx,ty)$. על פי כלל שרשרת, מתקיים:

$$
\begin{aligned}
g'(t) &= \mathrm{d}f_{(tx,ty)}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\\
&= xf'_x(tx,ty)+yf'_y(tx,ty)\\
&= \frac{1}{t}\left(txf'_x(tx,ty)+tyf'_y(tx,ty)\right)\\
&= \frac{1}{t}nf(tx,ty)\\
&= \frac{n}{t}g'(t)
\end{aligned}
$$

מכאן, ניתן להמשיך ששתי דרכים. אוהבי משוואות דיפרנציאליות, צריכים לפתור את המשוואה הדיפרנציאלית

$$.g'(t)-\frac{n}{t}g(t)=0$$

נכפיל בגורם אינטגרציה t^{-n} $\mu(t)=e^{-\int\frac{n}{t}\mathrm{dt}}=e^{-n\ln t}=$. נקבל:

$$t^{-n}g'(t)-nt^{-n-1}g(t)=0$$

אינטגרל על פי כלל מכפלה נותן:

$$\left(t^{-n}g\left(t\right)\right)=c$$

שזה שקול ל

$$.g\left(t\right)=ct^{n}$$

על מנת למצוא את c נציב $t=1$, ונקבל

$$g\left(1\right)=f\left(x,y\right)$$

והפתרון הוא

$$.g\left(t\right)=t^{n}f\left(x,y\right)$$

אלה שלא אוהבים משוואות דיפנציאליות... נוכיח ש

$$.\frac{g\left(t\right)}{t^{n}}=f\left(x,y\right)$$

נשים לב, שבמקרה הזה, $f\left(x,y\right)$ הוא מספר קבוע, ולכן בהתחלה נוכיח, ש $\frac{g(t)}{t^{n}}$ היא פונקציה קבועה.

$$\begin{aligned}\left(\frac{g\left(t\right)}{t^{n}}\right)' &= \frac{g'\left(t\right)}{t^{n}}-n\frac{g\left(t\right)}{t^{n+1}}\\ &= n\frac{g\left(t\right)}{t^{n+1}}-n\frac{g\left(t\right)}{t^{n+1}}=0\end{aligned}$$

ושוב קיבלנו ש $g\left(t\right)=ct^{n}$. נציב $t=1$ ונקבל $c=f\left(x,y\right)$, ומכאן:

$$g\left(t\right)=f\left(tx,ty\right)=t^{n}f\left(x,y\right)$$

כנדרש.