אבנר סופר

אוניברסיטת תל אביב

מבוא לפיזיקה מודרנית

תורת היחסות הפרטית

דינמיקה יחסותית בסיסית

כעת נשתמש בכלים המתימטיים של 4-וקטורים בגיאומטריה היפרבולית כדי לטפל במערכות מכניות בפיזיקה יחסותית.

4-וקטור מקום

את 3-וקטור המקום $\vec{r}$, המחבר את הראשית המרחבית לנקודה כלשהי,

הרחבנו ל-4-וקטור המקום $\tilde{r}$, המחבר שני ארועים (הראשית ה-4-ממדית וארוע אחר).

באותה צורה הרחבנו את הוקטור האינפיניטסימלי $d\vec{r}$ ל- $d\tilde{r}$.

נתבונן בוקטור 4-מקום אינפיניטסימלי $d\tilde{r}$ שמתאר קו עולם של גוף אמיתי בין ארוע $\tilde{r}$ לארוע $\tilde{r}+d\tilde{r}$

קו העולם של גוף אמיתי חייב להיות TL, כלומר, בעל נורמה חיובית:

$\left|d\tilde{r}\right|^2 = dt^2 - dr^2 > 0$ (dt הוא ריבוע הפרש הזמן בין האירועים ב-O ו-

$dr^2 \equiv dx^2 + dy^2 + dz^2$ הוא ריבוע הפרש המרחק ביניהם).

מאחר ש- $d\tilde{r}$ הוא TL, קיימת מערכת 'O בה שני הארועים, $\tilde{r}$ ו- $\tilde{r}+d\tilde{r}$, מתרחשים באותו מקום מרחבי $\vec{r}\,'$, כלומר, $dr'^2 = 0$.

אז 'O היא מערכת המנוחה, שבה הנורמה היא $\left|d\tilde{r}\right|^2 = d\tau^2$, כאשר $d\tau$ הוא, כזכור, הזמן העצמי.

4-וקטור המהירות

כעת נרצה להגדיר 4-וקטור מהירות.

מהירות ניוטונית מתקבלת ע"י חלוקת הוקטור האינפיניטסימלי $d\vec{r}$ בסקלר dt.

הרחבה טבעית של זה ל-4-מהירות היא $\frac{d\tilde{r}}{dt}$.

אבל בפיזיקה יחסותית, dt אינו סקלר, אז חלוקת $d\vec{r}$ ב- dt לא נותנת וקטור.

אולם, קיים גודל זמן דומה שהוא כן סקלר: זהו הפרש הזמן העצמי (האינטרוול האינוריאנטי) של שני הארועים $d\tau = \sqrt{dt^2 - dr^2}$, כאשר dt ו-dr הם הפרשי הזמן והמרחק בין הארועים במערכת כלשהי.

זהו סקלר משום ש- $d\tau = |\tilde{r}|$ הוא נורמה.

אז ננצל את זה ש- dτ הוא סקלר כדי להגדיר באמצעותו את וקטור המהירות,

$$\tilde{v} = \frac{d\tilde{r}}{d\tau} = \begin{pmatrix} dt / d\tau \\ d\vec{r} / d\tau \end{pmatrix},$$

שימו לב:

- $d\tilde{r}$ הוא וקטור משום שהוא עובר טרנספורמצית לורנץ לפי הכללים של וקטור (טרנספורמצית לורנץ כפי שמצאנו אותה עבור הזמן והמרחב).
- dτ הוא סקלר, כלומר, אינוריאנטי תחת טרנספורמצית לורנץ, כי הוא נורמה, $d\tau = |\tilde{r}|$.
- אז ההגדרה $\tilde{v} \equiv \frac{d\tilde{r}}{d\tau} = \frac{d\tilde{r}}{|d\tilde{r}|}$ מבטיחה שהמהירות גם היא 4-וקטור.

- לעומת זאת, $\frac{d\tilde{r}}{dt}$ הם 4 מספרים, אבל הם בטוח אינם מהוים רכיבים של 4-וקטור כי תכונות הטרנספורמציה שלהם אינם אלה של וקטור.

הערה: השוו:

- המהירות הניוטונית היא קצב שינוי ה-3-מקום ביחס לזמן.
- ה-4-מהירות היא קצב שינוי ה-4-מקום ביחס לזמן העצמי.

נתבונן בוקטור המהירות של גוף במערכת המנוחה שלו.

במערכת זו, $\tau = t$, אז $d\tau = dt$.

אז ה-4-מהירות היא $\tilde{v} = \frac{d\tilde{r}}{d\tau} = \begin{pmatrix} dt/dt \\ d\vec{r}/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{v} \end{pmatrix}$.

אבל אנו במערכת המנוחה אז הגוף אינו נע, כך ש- $\vec{v} = 0$.

אז במערכת זו, ה-4-מהירות היא $\tilde{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{0} \end{pmatrix}$.

כצפוי, החלק המרחבי הוא 0, אבל חלק הזמן אינו אפס.

ריבוע הנורמה של 4-וקטור המהירות הוא $|\tilde{v}|^2 = \left|\frac{d\tilde{r}}{|d\tilde{r}|}\right|^2 = \frac{|d\tilde{r}|^2}{|d\tilde{r}|^2} = 1$.

כלומר, הנורמה של **כל** 4-וקטור מהירות היא תמיד **1**.

שימו לב להבדל ביחס ל-3-מהירות, שהנורמה שלה אינה תמיד בעלת אותו הערך.

אולי הפסדנו משהו בכך של-4-מהירות נורמה של 1, אבל נראה שזה גם יכול להיות יתרון.

בכל מקרה, הגדרת ה-4-מהירות היתה טבעית בהנתן ה"אילוצים" של תורת היחסות.

שימו לב שסכום וקטורי מהירות הוא וקטור שאיננו בהכרח וקטור מהירות, משום שאינו בהכרח מקיים את התנאי שהנורמה שלו היא 1:

$\left|\tilde{v}_1 + \tilde{v}_2\right|^2 = \left|\tilde{v}_1\right|^2 + \left|\tilde{v}_1\right|^2 + 2\tilde{v}_1 \cdot \tilde{v}_2 = 2 + 2\tilde{v}_1 \cdot \tilde{v}_2$, וזה לא בהכרח 1.

כעת נכתוב את המהירות באמצעות dt במקום $d\tau$ במכנה:

מאחר ש- $d\tau = \sqrt{dt^2 - dr^2}$ (כי שני אלה ביטויים לנורמה $\left|d\tilde{r}\right|$),

אז מקבלים $d\tau = dt\sqrt{1-\frac{dr^2}{dt^2}} = dt\sqrt{1-v^2}$, כאשר השתמשנו בקיצור $v^2 = \left|\vec{v}\right|^2$.

שימו לב ש- $1/\sqrt{1-v^2}$ שווה לפקטור $\gamma(v)$ עבור בוסט למערכת המנוחה של הגוף.

כלומר, קיבלנו את התארכות הזמן המוכרת, $d\tau = \frac{dt}{\gamma}$.

נציב את זה ב-4-מהירות:

$$\tilde{v} = \begin{pmatrix} dt/d\tau \\ d\vec{r}/d\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma d\vec{r}/d\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma\vec{v} \end{pmatrix}.$$

בעבר השתמשנו ב- β במקום ב- v כדי לסמן את מהירות הגוף ביחס למערכת המנוחה שלו.

אז נחליף את הסימן v ב- β, ונקבל

$$\boxed{\tilde{v} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma\vec{\beta} \end{pmatrix}}$$

<u>כלל חיבור 3-מהירויות</u>

מביטוי זה למהירות ניתן לראות שאת 3-וקטור המהירות $\vec{v}$ (או $\vec{\beta}$) מקבלים ע"י חלוקת החלק המרחבי של $\tilde{v}$ בחלק הזמן שלו:

$$\vec{v} = \frac{1}{\tilde{v}^0}\begin{pmatrix} \tilde{v}^1 \\ \tilde{v}^2 \\ \tilde{v}^3 \end{pmatrix}.$$

נשתמש בתכונה זו כדי למצוא את כלל חיבור המהירויות:

שאלה:

חללית שנעה במהירות $\beta_1\hat{x}$ ביחס לכדור הארץ יורה טיל במהירות $\beta_2\hat{x}$ ביחס לחללית.

מהי 3-מהירות הטיל ביחס לכדוה"א?

ה-4-מהירות של הטיל במערכת החללית הוא (נתבונן רק באברי t ו- x):

$$\tilde{v}_2 = \begin{pmatrix} \gamma_2 \\ \gamma_2\beta_2 \end{pmatrix}.$$

נפעיל בוסט על וקטור זה למערכת כדוה"א:

$$\tilde{v}'_2 = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_1\beta_1 \\ \gamma_1\beta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_2 \\ \gamma_2\beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1\gamma_2(1+\beta_1\beta_2) \\ \gamma_1\gamma_2(\beta_1+\beta_2) \end{pmatrix}.$$

נמצא את ה-3-מהירות של הטיל במערכת כדוה"א ע"י חלוקת החלק המרחבי בחלק הזמן:

$$\vec{v}'_2 \cdot \hat{x} = \frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}.$$

וזוהי בדיוק נוסחת חיבור ה-3-מהירות שמצאנו קודם.

שאלת בית: קבלו בשיטה זו את כלל חיבור המהירויות גם בכוונים הניצבים לבוסט.

4-וקטור התנע

בפיזיקה ניוטונית, כפל מהירות החלקיק במסתו נותן את התנע שלו.

מאחר שהגדרנו את המסה להיות סקלר, אפשר להשתמש באותה הגדרה של תנע גם במקרה היחסותי.

נעשה זאת ונראה אם היא נותנת תכונות רצויות ביחס למה שלמדנו על ה-3-תנע של הגוף.

בפרט, נרצה שהחלק המרחבי של ה-4-וקטור יהיה התנע היחסותי $\vec{p} = \gamma m\vec{\beta}$.

אז לפי הגדרה זו, 4-וקטור התנע הוא

$$\tilde{p} = m\tilde{v} = \begin{pmatrix} \gamma m \\ \gamma m\vec{\beta} \end{pmatrix}$$

החלק המרחבי אכן שווה לתנע היחסותי $\vec{p} = \gamma m\vec{\beta}$, אז זה טוב.

אז רואים שרכיב הזמן שווה לסך-כל האנרגיה היחסותית של הגוף: $p^0 = m\gamma$.

אם כך, ניתן לכתוב

$$\boxed{\tilde{p} = \begin{pmatrix} E \\ \vec{p} \end{pmatrix}}$$

אז גילינו שתנע ואנרגיה קשורים. הם רכיבים של אותו 4-וקטור.

בפרט, במערכת המנוחה של הגוף, $\beta = 0$. אז במערכת זו $\tilde{p} = m\tilde{v} = m\begin{pmatrix} 1 \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ \vec{0} \end{pmatrix}$,

כלומר, יש לגוף רק אנרגיה, ששוה למסה – אנרגית המנוחה. אז הכל מסתדר כרצוי.

הערה על אנרגיה: האנרגיה של גוף אינווריאנטית תחת סיבובים, ולכן היא סקלר בפיזיקה ניוטונית.

אך היא איננה סקלר בפיזיקה יחסותית (אינה אונוריאנטית תחת בוסט): היא רק רכיב אחד ב-4-וקטור התנע.

<u>שימור ה-4-תנע:</u>

בפיזיקה ניוטונית, שימור התנע ושימור האנרגיה הם שני חוקים שונים ובלתי תלויים.

כאן הגענו לאיחוד של חוקי השימור האלה: **חוק שימור ה-4-תנע.**

שימו לב שגם בפיזיקה ניוטונית קיים איחוד כזה:

- ניתן היה להגדיר שם 3 חוקים נפרדים עבור שימור של p_x, p_y, p_z.
- ההבנה שאלה רכיבים של 3-וקטור מאחדת אותם לחוק אחד.
- אותו הדבר גילינו עכשיו לגבי שימור אנרגיה ותנע – הם חלקים של שימור ה-4-תנע.

<u>4-תנע ו-3 מהירות:</u>

מהביטוי $\tilde{p} = m\tilde{v} = \begin{pmatrix} \gamma m \\ \gamma m\vec{\beta} \end{pmatrix}$ רואים ש- את ה-3-מהירות של הגוף אפשר לקבל ע"י

$\vec{\beta} = \vec{p} / E$. בוסט במהירות זו יביא אותנו למערכת המנוחה של הגוף.

הנורמה של ה-4-תנע:

מאחר ש- $\tilde{p} = m\tilde{v}$ ו- $|\tilde{v}| = 1$, אז מקבלים

$$\boxed{|\tilde{p}| = m}$$

כלומר, $|\tilde{p}|^2 = E^2 - |\vec{p}|^2 = m^2$. אז מתקבל הקשר הבא בין תנע ואנרגיה:

$$\boxed{E = \sqrt{p^2 + m^2}}$$

כאשר השתמשנו בכתיב המקוצר $p = |\vec{p}|$.

שימו לב שאם מסת גוף היא 0, מתקבל היחס הבא בין האנרגיה והתנע שלו: $E = p$,

ומהירות הגוף היא $\beta = \dfrac{p}{E} = 1$. כלומר, גוף חסר מסה נע במהירות האור.

נכון יותר לומר כי

- קו העולם של גוף בעל מסה מורכב מוקטורים $d\tilde{r}$ שהם TL.
- קו העולם של גוף חסר מורכב מוקטורים $d\tilde{r}$ שהם LL.

4-וקטור התנע ביחידות רגילות

ביחידות טבעיות, $\tilde{p} = \begin{pmatrix} \gamma m \\ \gamma m\vec{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ \vec{p} \end{pmatrix}$.

כדי לעבור ליחידות רגילות, רואים שיש לכפול ב-c, ואז $\tilde{p} = \begin{pmatrix} \gamma mc \\ \gamma m\vec{\beta}c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix}$.

אם כך, האנרגיה של גוף ביחידות רגילות היא $E = \gamma mc^2$,

והתנע של הגוף הוא $\vec{p} = \gamma m\vec{\beta}c$.

הקשר בין תנע ואנרגיה הוא $E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$

(שימו לב ש- $E = mc^2$ נכון במקרה הפרטי p=0.)

השימושיות של יחידות טבעיות:

יחידות טבעיות משמשות פיזיקאים באופן יום-יומי בכל מקרה בו עוסקים בגופים יחסותיים.

למשל, בפיזיקת החלקיקים נוהגים להשתמש ביחידות $\text{GeV} = 10^9$ eV, כאשר 1 eV היא האנרגיה של אלקטרון שמואץ תחת מתח של וולט אחד.

(מאחר שמטען האלקטרון הוא $1.602176487\times10^{-19}$ C, אז $1\text{ eV} = 1.602176487\times10^{-19}$ J. מאחר שהחלקיקים מואצים בניסוי באמצעות מתח ידוע, יחידה זו נוחה ביותר.)

החלקיקים הנפוצים ביותר בניסויים כאלה הם פיונים (pions). ל-π^0 התכונות הבאות:

- מסה של 0.135 GeV
- תנע טיפוסי של כ- 0.5 GeV
- אנרגיה טיפוסית מסדר גודל דומה, נאמר $E = \sqrt{0.5^2 + 0.135^2}GeV = 0.52GeV$.
- מהירות מסדר גודל $\beta = \frac{p}{E} = \frac{0.50}{0.52} = 0.96$

אבל ביחידות רגילות, מסת הפיון היא

$$m = \frac{(0.135\,GeV)\left(1.6\times10^{-10}\,\frac{J}{GeV}\right)}{\left(3\times10^{8}\,\frac{m}{s}\right)^2} = 2.4\times10^{-28}\,kg$$

התנע שלו הוא
$$p = \frac{(0.5\,GeV)\left(1.6\times10^{-10}\,\frac{J}{GeV}\right)}{3\times10^{8}\,\frac{m}{s}} = 2.7\times10^{-19}\,kg\,\frac{m}{s}$$

והאנרגיה שלו היא $E = 0.52GeV\left(1.6\times10^{-10}\,\frac{J}{GeV}\right) = 8.3\times10^{-11}\,J$.

בקיצור, הגדלים השונים מאוד לא נותנים שום אינטואיציה לגבי מה שבאמת חשוב.

לעומת זאת, הגדלים הדומים ביחידות טבעיות משקפים בפשטות את הקשר בין מסה, תנע, ואנרגיה.

נהוג גם לתת את התנע ב- GeV/c ואת המסה ב- GeV/c^2.

הערה כללית

מאחר שאנו עוסקים בגדלים יחסותיים, לעתים קרובות נאמר "תנע" במקום "4-תנע" או "4-וקטור התנע". במקרים אלה יש לשים לב אם הכוונה היא ל-4-תנע או ל-3-תנע לפי ההקשר.