פתרון תרגיל 5

1. עבור קור' פולריות אנו יודעים כי

$$\hat{r} = \hat{x}\cos\theta + \hat{y}\sin\theta$$

$$\hat{\theta} = -\hat{x}\sin\theta + \hat{y}\cos\theta$$

וכן כי

$$\dot{\hat{r}} = \dot{\theta}\hat{\theta} \quad ; \quad \dot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta}\hat{r}.$$

מכיוון ש־ $\vec{r} = r\hat{r}$ אז מהכללים לעיל

$$\vec{v} \equiv \dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\hat{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

ו־

$$\begin{aligned}\vec{a} \equiv \dot{\vec{v}} &= \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\hat{r}} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\dot{\hat{\theta}} \\ &= \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} - r\dot{\theta}^2\hat{r} \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}\end{aligned}$$

(א) מהנתונים שלנו $\frac{dr}{dt} = v_0 - gt$ ו־ $\frac{d\theta}{dt} = \omega_0$, ותנאי ההתחלה $r = 0,\ \theta = 0$ ב־ $t = 0$, קל לבצע אינטגרציה לפי הזמן ולקבל

$$r(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2,$$

$$\theta(t) = \omega_0 t,$$

אם נציב את התוצאות הללו בנוסחאות ל־ $\vec{v}$ ול־ $\vec{a}$ שמצאנו קודם נקבל

$$\boxed{\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} = (v_0 - gt)\hat{r} + (v_0 t - \frac{1}{2}gt^2)\omega_0\hat{\theta},}$$

$$\boxed{\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta} = [-g - \omega_0^2(v_0 t - \frac{1}{2}gt^2)]\hat{r} + [2\omega_0(v_0 - gt)]\hat{\theta}.}$$

כעת, על מנת לרשום את התוצאה בקור' קרטזיות פשוט נציב בפתרונות את $\hat{r} = \hat{x}\cos\theta + \hat{y}\sin\theta$ ו־ $\hat{\theta} = -\hat{x}\sin\theta + \hat{y}\cos\theta$ ונקבל ($\theta = \omega_0 t$)

$$\boxed{\vec{v} = [(v_0 - gt)\cos\omega_0 t - (v_0 t - \frac{1}{2}gt^2)\omega_0\sin\omega_0 t]\hat{x} + [(v_0 - gt)\sin\omega_0 t + (v_0 t - \frac{1}{2}gt^2)\omega_0\cos\omega_0 t]\hat{y},}$$

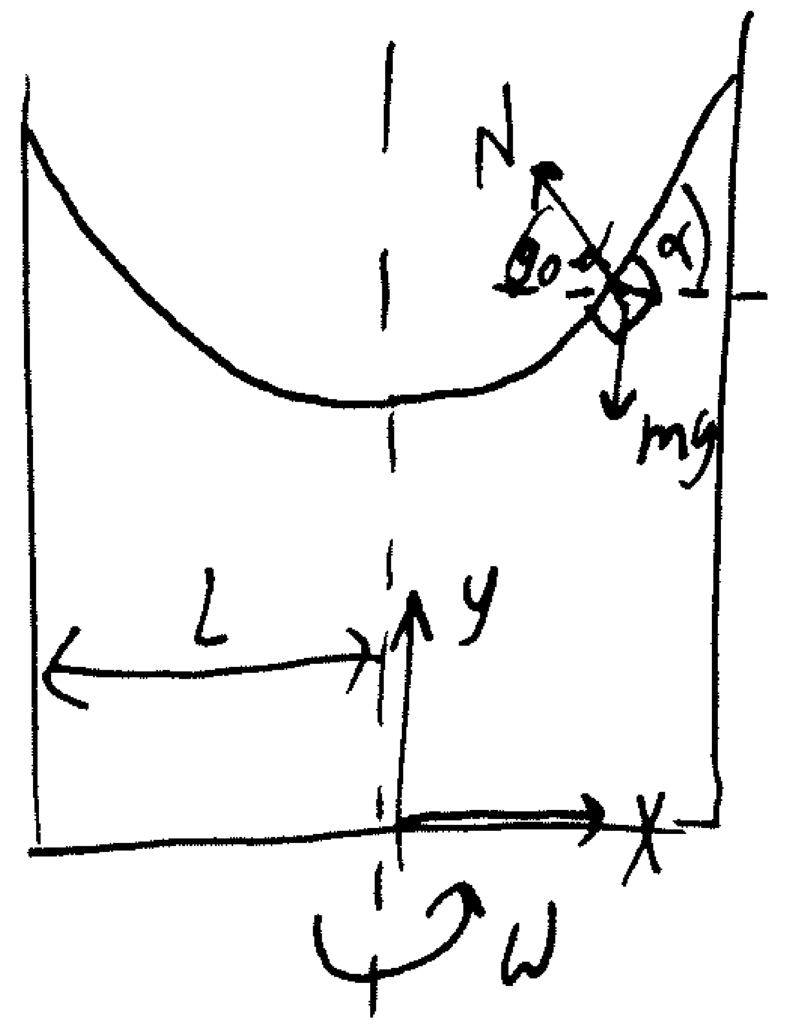
$$\boxed{[(-g - \omega_0^2(v_0 t - \frac{1}{2}gt^2))\cos\omega_0 t - 2\omega_0(v_0 - gt)\sin\omega_0 t]\hat{x} + [(-g - \omega_0^2(v_0 t - \frac{1}{2}gt^2))\sin\omega_0 t + 2\omega_0(v_0 - gt)\cos\omega_0 t]\hat{y}.}$$

(ב) התנאי לכך שהחלקיק יחזור לראשית הוא $r(t) = 0$. מהפתרון לעיל $r(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$ ברור כי פרט ל־ $t = 0$ הפתרון הנוסף הוא

$$t = \frac{2v_0}{g}.$$

על מנת למצוא את מספר ההקפות n נציב את הזמן שמצאנו ב־ $\theta(t) = \omega_0 t$ ונחלק ב־ 2π (כל הקפה היא 2π רדיאנים):

$$\boxed{n = \frac{\omega_0 t}{2\pi} = \frac{\omega_0 v_0}{\pi g}.}$$



2) נסתכל על אלמנט נוזל קטן.
פני הנוזל מסתדרים בצורה
המתאימה ל- $y(x)$ שאותו מחפשים.

א. משוואת הכוחות לאלמנט הנוזל:

$$\begin{cases} x| \; -N\sin\alpha = -m\omega^2 x \\ y| \; -mg + N\cos\alpha = 0 \end{cases}$$

מהעברת אגפים וחלוקת המשוואות מקבלים:

$$\tan\alpha = \frac{\omega^2}{g}x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2}{g}x$$ מגאומטריה אנליטית יודעים $\tan\alpha = \frac{dy}{dx}$:

$$y = \frac{\omega^2}{2g}x^2 + C_1$$ נבצע אינטגרציה:

נקבע את C_1 מדרישה לשימור נפח הנוזל:

$$2Lh = \int_{-L}^{L} y(x)\,dx = \int_{-L}^{L}\left(\frac{\omega^2}{2g}x^2 + C_1\right)dx = \frac{\omega^2}{g}\frac{L^3}{3} + 2LC_1$$

$$C_1 = h - \frac{\omega^2L^2}{6g} \Longrightarrow y = \frac{\omega^2}{g}x^2 + h - \frac{\omega^2L^2}{6g}$$

ב. התאוצה המשיקית היא אפס מאחר ו-ω קבוע ולכן $|\vec{v}|$ קבוע.
התאוצה הרדיאלית היא, לפי נוסחה של תנועה מעגלית,

$$a_R = \omega^2 R = \omega^2|x|$$

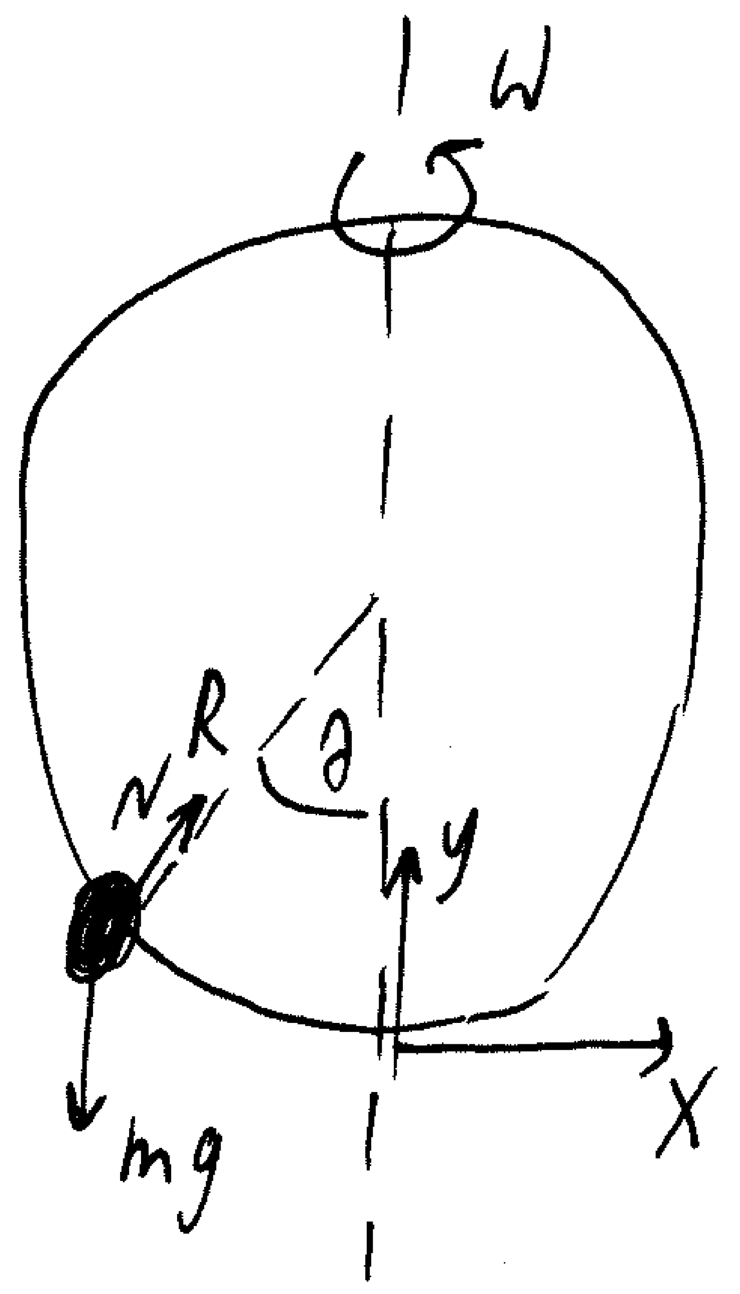
$$\vec{a} = -\omega^2 x\hat{x}$$

ג. בקצה הכלי מגיע הנוזל לגובה $y(L)$. גובה זה צריך להיות
גדול מ- H כדי שנוזל ישפך.

$$y(L) > H$$

$$\frac{\omega^2}{2g}L^2 + h - \frac{\omega^2L^2}{6g} > H \Longrightarrow \omega > \sqrt{3}\,\frac{\sqrt{g(H-h)}}{L}$$

זהו התנאי להשפכות נוזל מהכלי. אגף ימין הוא ω הקריטי!



3) נרשום את משוואות התנועה של החרוז.

$$\begin{cases} x|\ N\sin\theta = m\omega^2 R\sin\theta \\ y|\ N\cos\theta - mg = 0 \end{cases}$$

נעביר אגפים ונחלק משוואות לקבלת:

$$\tan\theta = \frac{\omega^2 R}{g}\sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{g}{\omega^2 R}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{g}{\omega^2 R}\right)$$

ב. לפי נוסחאות תנועה מעגלית:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$V = \omega R\sin\theta$$

ג. תאוצתו המשיקית של החרוז היא אפס מאחר וגודל מהירותו קבוע. תאוצתו הרדיאלית היא:

$$a_R = \omega^2 R\sin\theta$$

$$\vec{a} = \omega^2 R\sin\theta\,\hat{x}$$

4) א. משוואת התנועה של הכדור היא:

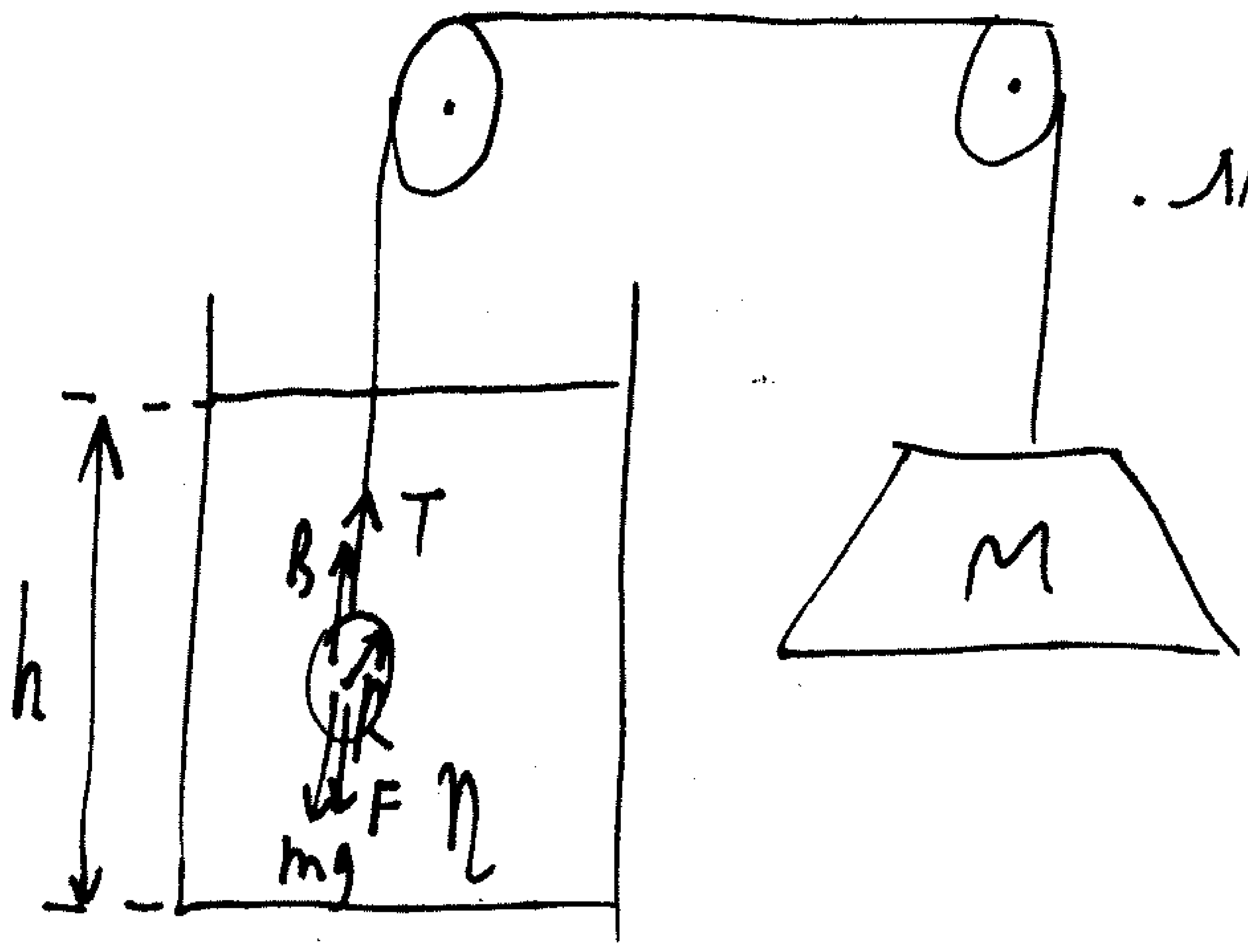
$$B + T - mg - F = m\dot{V}$$

מיקום y הוא מיקום תחתית הכדור לשם נוחות.

תנאי התחלה:

$$y(t=0)=0$$

$$V(t=0)=0$$



נרשום את האיברים במשוואה באופן מפורש:

$$B - mg = \rho_l \frac{4\pi}{3}R^3 g - \rho_s \frac{4\pi}{3}R^3 g = (\rho_l - \rho_s)\frac{4\pi}{3}R^3 g \equiv A_1 g$$

נגדיר מקדם חדש.

המתיחות שווה ל:

$$T = M(g-a)$$

$$F = 6\pi\eta RV \equiv A_2 V$$

לסיכום המשוואה היא:

$$\underbrace{A_1 g + Mg}_{\text{חלק לא הומוגני}} \underbrace{- A_2 V - (m+M)\dot{V}}_{\text{חלק הומוגני}} = 0$$

$m_{tot} = m+M$

פתרון החלק ההומוגני ניתן ע"י הפרדת משתנים:

$$-A_2 V - m_{tot}\dot{V} = 0$$

$$-A_2 V - m_{tot}\frac{dV}{dt} = 0 \Longrightarrow \frac{dV}{V} = -\frac{A_2}{m_{tot}}dt \Longrightarrow \ln V = -\frac{A_2}{m_{tot}}t + C_1$$

$$\Rightarrow V_h = D e^{-(A_2/m_{tot})t}$$

פתרון פרטיקולרי יכול להתקבל ע"י הצבת $\dot{V}=0$, למשל.

$$V_p = \frac{A_1 g + Mg}{A_2}$$

$$V(t) = V_h + V_p = D e^{-(A_2/m_{tot})t} + \frac{A_1 g + Mg}{A_2}$$

נציב את תנאי ההתחלה $V(t=0)=0$ למציאת קבוע האינטגרציה, D:

$$0=V(t=0)=D+\frac{A_1 g+Mg}{A_2} \Longrightarrow D=-\frac{A_1 g+Mg}{A_2}$$

$$V(t)=\frac{A_1 g+Mg}{A_2}\left(1-e^{-(A_2/m_{tot})t}\right)$$

נציב את A_1, A_2 לקבלת התשובה הסופית:

$$V(t)=\frac{\left[(\rho_\ell-\rho_s)\frac{4\pi}{3}R^3+M\right]g}{6\pi\eta R}\left(1-e^{-(6\pi\eta R/(m+M))t}\right)$$

$$\left[m=\frac{4\pi}{3}\rho_s R^3\right]$$

ג.

$$y(t)=y(t=0)+\int_0^t V(t')\,dt'=$$

$$=\frac{\left[(\rho_\ell-\rho_s)\frac{4\pi}{3}R^3+M\right]g}{6\pi\eta R}\left(t+\frac{1}{6\pi\eta R/m_{tot}}\left(e^{-(6\pi\eta R/m_{tot})t}-1\right)\right)$$

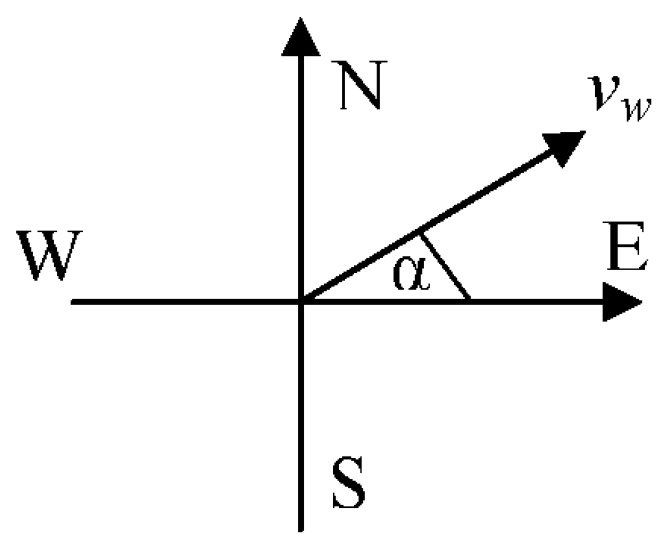
ד. יש למצוא את t_1 מהמשוואה

$$y(t_1)=h-2R$$

זוהי משוואה טרנסצנדנטית שאינה ניתנת לפתרון אנליטי. הגובה שמציבים הוא $h-2R$ כי קבענו את y כגובה של תחתית הכדור.

.5

נבחר את הכיוון החיובי של ציר y בכיוון צפון ואת הכיוון החיובי של ציר x בכיוון מזרח:



מהירות הרוח היא v_w (במערכת כדור הארץ) בזווית α ביחס לציר x.

$$\vec{v}_w = v_w \cos\alpha\,\hat{x} + v_w \sin\alpha\,\hat{y}$$

המכונית נעה בכיוון צפון במהירות v כלומר $\vec{v}_1 = v\hat{y}$. הנהג מרגיש את הרוח כבאה מכיוון מערב. נעבור למערכת המנוחה של הנהג. במערכת זו מהירות הרוח היא:

$$\vec{v}\,'_w = \vec{v}_w - \vec{v}_1 = v_w \cos\alpha\,\hat{x} + (v_w \sin\alpha - v)\hat{y}$$

כיוון הרוח הוא ממערב למזרח כלומר רכיב הy מתאפס ומתקיים:

$$v = v_w \sin\alpha \quad (\mathrm{I})$$

מכונית שנייה נעה במהירות $2v/\sqrt{3}$ בכיוון מזרח כלומר:

$$\vec{v}_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} v\hat{x}$$

במערכת המנוחה של המכונית הרוח מגיעה מכיוון 30° מערבית לדרום כלומר מהירות הרוח היא בזווית $\theta = 60^o$ עם הכיוון החיובי של ציר הx. מהירות הרוח במערכת הנהג:

$$\vec{v}\,'_w = \vec{v}_w - \vec{v}_2 = (v_w \cos\alpha - \frac{2}{\sqrt{3}} v)\hat{x} + (v_w \sin\alpha)\hat{y}$$

מהנתון נקבל :

$$\frac{v_w \sin\alpha}{v_w \cos\alpha - \frac{2}{\sqrt{3}} v} = \tan(60^\circ) \quad (\mathrm{II})$$

משוואות (I) ו(II) מהוות שתי משוואות בשני נעלמים לα ו v_w. מפתרונן נקבל:

$$\alpha = 30^\circ$$

$$v_w = 2v$$

6. (א) אנו יודעים כי מהירות הכדור (יחסית לצופה על הקרקע) ניתנת ע''י

$$v(t) = v_0 - gt \quad (g > 0),$$

וכי גובה הכדור, בהנחה שהקרקע היא בגובה אפס, ניתן ע''י

$$h(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2.$$

שיא הגובה, הוא הנקודה בה המהירות מחלפיה סימן (ממצב שהכדור עולה $v > 0$, למצב שהוא יורד $v < 0$), כלומר $v(t) = 0$. מכאן שהכדור נמצא בשיא ברגע $t_{\max}$:

$$\boxed{t_{\max} = \frac{v_0}{g}.}$$

כעת ניתן למצוא את הגובה המקסימלי ע''י הצבת הזמן בנוסחה לגובה ומקבלים

$$\boxed{h_{\max} = \frac{v_0^2}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2}{g^2} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g}.}$$

(ב) על מנת לפתור את הבעיה יחסית למעלית יש להחסיר את מהירות המעלית וגובה המעלית מהנוסחאות למהירות וגובה בסעיף הקודם. מהירות המעלית היא קבועה v_1 (כלפי מעלה) והגובה שלה נתון ע''י $v_1 t$. לכן, יחסית למעלית, מהירות הכדור היא

$$v_{\text{rel}} = (v_0 - v_1) - gt,$$

וגובה הכדור הוא

$$h_{\text{rel}} = (v_0 - v_1) t - \frac{1}{2} g t^2.$$

כעת באותו אופן כמו קודם מקבלים, שהכדור נמצא בשיא (יחסית למעלית) ב-

$$\boxed{t_{\text{rel}} = \frac{v_0 - v_1}{g},}$$

והגובה היחסי של הכדור ברגע זה הוא

$$\boxed{h_{\text{rel}} = \frac{1}{2} \frac{(v_0 - v_1)^2}{g}.}$$

.7
א. עבור הגוף m_1, בציר y יש נפילה חופשית. בציר x לעגלה יש תאוצה a_0, ולכן לצופה בעגלה הגוף יראה כמאיץ בתאוצה a_0 בכיוון ההפוך.

$$\vec{a} = -a_0\hat{x} - g\hat{y}$$

לצופה בעגלה נראה שהגוף מתחיל לנוע ממנוחה בזמן t_1:

$$\vec{v}(t) = v(t_1) + \int_{t_1}^{t} \vec{a}(t)dt$$

$$\vec{v} = -a_0(t-t_1)\hat{x} - g(t-t_1)\hat{y}$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_1) + \int_{t_1}^{t} \vec{v}(t)dt$$

$$\vec{r} = -\frac{a_0(t-t_1)^2}{2}\hat{x} + (h - \frac{g(t-t_1)^2}{2})\hat{y}$$

עבור הגוף m_2 המשוואות זהות, פרט לכך שלגוף יש מהירות התחלתית $v_2\hat{x}$:

$$\vec{a} = -a_0\hat{x} - g\hat{y}$$

$$\vec{v} = (v_2 - a_0(t-t_1))\hat{x} - g(t-t_1)\hat{y}$$

$$\vec{r} = (v_2(t-t_1) - \frac{a_0(t-t_1)^2}{2})\hat{x} + (h - \frac{g(t-t_1)^2}{2})\hat{y}$$

ב. לצופה מחוץ לעגלה הגופים מתחילים לנוע במהירות התחלתית כלשהי בלי תאוצה בכיוון ציר x.
m_1 מתחילה לנוע במהירות a_0t_1 (מהירות העגלה בזמן הזריקה):

$$\vec{a} = -g\hat{y}$$

$$\vec{v} = a_0t_1\hat{x} - g(t-t_1)\hat{y}$$

$$\vec{r} = (a_0t_1(t-t_1))\hat{x} + (h - \frac{g(t-t_1)^2}{2})\hat{y}$$

עבור m_2 המשוואות זהות פרט לכך שהמהירות ההתחלתית היא $a_0t_1 + v_2$ בכיוון x:

$$\vec{a} = -g\hat{y}$$

$$\vec{v} = (a_0t_1 + v_2)\hat{x} - g(t-t_1)\hat{y}$$

$$\vec{r} = ((a_0t_1 + v_2)(t-t_1))\hat{x} + (h - \frac{g(t-t_1)^2}{2})\hat{y}$$